FOURIERSCHE ENTWICKLUNGEN

IM

GEBIETE DER DOPPELTPERIODISCHEN FUNKTIONEN

DRITTER GATTUNG.

INAUGURAL-DISSERTATION

ZUR

ERLANGUNG DER PHILOSOPHISCHEN DOCTORWÜRDE

AN DER

UNIVERSITÄT ROSTOCK

VON

GUSTAV MOHRMANN,

AUS FRIEDLAND IN MECKL.

REFERENT:

HERR PROFESSOR DR. KRAUSE ZU DRESDEN.

DRUCK VON B. G. TEUBNER IN LEIPZIG.

1889.

Die folgende Arbeit kann gewissermafsen als Ergänzung einer Reihe von Arbeiten des Herrn Prof. Krause dienen, die unter dem Titel *„Über die Entwickelung der doppelt periodischen Funktionen zweiter und dritter Art in trigonometrische Reihen“* in den „Mathematischen Annalen“ erschienen sind*).

Im ersten Abschnitt werden zunächst aus der Theorie der doppeltperiodischen Funktionen einige für das Verständnis des Folgenden notwendige allgemeine Sätze gebracht. Dann werden kurz die hier heranzuziehenden Resultate angegeben, zu denen Herr Prof. Krause in den eben erwähnten Arbeiten bei der Aufgabe gekommen ist, die doppelt periodischen Funktionen dritter Gattung in trigonometrische Reihen zu entwickeln. Für die eine der Primfunktionen, auf deren Betrachtung sich danach die letztere Aufgabe reduzieren läfst, nämlich *für die Funktion*

$$\frac{\vartheta_\alpha(nu + na,\ n\tau)}{\vartheta_\beta(u,\ \tau)}$$

die trigonometrische Entwickelung auf verschiedenen Wegen herzustellen und die nach den verschiedenen Methoden gefundenen Resultate zu einander in Beziehung zu setzen, ist die Hauptaufgabe der vorliegenden Arbeit. Zu selbständigen Leistungen bietet der erste Abschnitt nur bei den Beweisen einiger der gebrachten Theoreme Gelegenheit.

Der zweite Abschnitt, welcher ursprünglich die Lösung der Hauptaufgabe in vollster Ausführlichkeit brachte, konnte mit Rücksicht auf die beiden letzten der oben erwähnten Arbeiten in den „Math. Annalen“, die beide *nach* Einreichung dieser Dissertation bei der philosophischen Fakultät der Universität Rostock im Druck erschienen sind, bedeutende Kürzungen erfahren. Da nämlich einerseits diese Arbeiten, an deren einer übrigens der Verfasser gegenwärtiger Dissertation mit beteiligt ist, wenigstens für *eine* der sechszehn Funktionen von dem Typus

$$\frac{\vartheta_\alpha(nu + na,\ n\tau)}{\vartheta_\beta(u,\ \tau)}$$

*) Vgl. „Math. Annalen“ Band 30, pag. 425ff. und pag. 516ff.; Band 32, pag. 331ff.; Band 33, pag. 108ff.

auf die mannigfachste Weise trigonometrische Entwickelungen ableiten, so konnte sich der Verfasser auf die kurze Wiedergabe der dort gefundenen Resultate und Aufstellung der entsprechenden Formeln für die fünfzehn andern Funktionen beschränken. Andererseits ist in den Arbeiten auch schon teilweise die Vergleichung der verschiedenen Resultate durchgeführt, so dafs hier nur noch die beiden, noch nicht verglichenen Resultate in Beziehung zu einander gesetzt zu werden brauchen, oder bestimmter ausgedrückt: *Es bedarf nur noch der Vergleichung der durch Multiplikation von trigonometrischen Entwickelungen gewonnenen Fourierschen Reihe für unsere Funktionen mit der nach einer der andern Methoden gefundenen, welche letzteren Reihen bereits sämmtlich auf einander zurückgeführt sind.* Zwecks Durchführung dieser Vergleichung erschien es dem Verfasser am bequemsten, erst die Resultate, welche Herr Prof. Krause in der letzten der eben erwähnten Arbeiten gefunden hat, auf einem anderen Wege abzuleiten und dadurch zwischen gewissen, in den fertigen Formeln des Herrn Prof. Krause auftretenden Constanten $F_{l,r}$ neue Relationen herzustellen, die von besonderer Wichtigkeit für die Durchführung der Coefficientenvergleichung sind.

Im dritten Abschnitt werden endlich die gefundenen Formeln für die speciellen Fälle $n = 2$ und $n = 3$ aufgestellt und gezeigt, dafs unsere Resultate thatsächlich mit den von andern Mathematikern, namentlich von Biehler in seiner thèse de doctorat*) gefundenen identisch sind.

Aufser den bereits citierten hat der Verfasser noch eine Arbeit von Appell in den Annales de l'Ecole Normale Supérieure**) benutzt.

Die Arbeit wurde im mathematischen Seminar der Universität Rostock im Wintersemester 1887/88 begonnen. Verfasser kann nicht umhin, für den im ganzen Laufe der Ausführung des Themas in bereitwilligster und ausreichendster Weise erteilten Rat des Herrn Prof. Dr. Krause auch an dieser Stelle seinen verbindlichsten Dank auszusprechen.

---

*) Sur les développements en séries des fonctions doublement périodiques de troisième espèce. Paris 1879.

**) Sur les fonctions doublement périodiques de troisième espèce. Annales de l'école N. S., IIIe série, tomes I, II.

Erster Abschnitt.

Allgemeine Betrachtungen über doppeltperiodische Funktionen dritter Gattung und deren trigonometrische Entwicklungen.

§ 1.

Fundamentale Theoreme über doppeltperiodische Funktionen dritter Gattung.

Unter einer eindeutigen doppeltperiodischen Funktion dritter Gattung versteht man eine eindeutige Funktion der komplexen Variabeln z, welche den Gleichungen genügt:

$$\alpha)\ f(z+1) = e^{az+b} f(z); \qquad \beta)\ f(z+\tau) = e^{a'z+b'} f(z).$$

Es läfst sich zunächst zeigen, dafs die beiden Gröfsen a und a' nicht ganz willkürlich gegeben sein dürfen, sondern die Gleichung erfüllen müssen:

$$a' = a\tau + 2\mu\pi i,$$

wobei μ irgend eine ganze Zahl bedeutet. Wird jetzt statt der Funktion $f(z)$ die neue Funktion

$$F(z) = e^{-\frac{1}{2}\{az^2+(2b-a)z\}} \cdot f(z)$$

eingeführt, so genügt diese einfacheren Bedingungsgleichungen, als $f(z)$ nämlich den Gleichungen

$$(1) \qquad \alpha)\ F(z+1) = F(z); \qquad \beta)\ F(z+\tau) = e^{2\mu\pi\imath z + 2\pi\imath A} F(z),$$

wo zur Abkürzung

$$2\pi\imath A = b' - b\tau + \frac{a\tau}{2}(1-\tau)$$

gesetzt wurde.

Ist $\mu = 0$, so nennt man die dazu gehörigen Funktionen $F(z)$ doppeltperiodische Funktionen *zweiter* Gattung. Ist auch noch $A = 0$, so erhält man die gemeinen doppeltperiodischen, oder die *elliptischen* Funktionen.

Es soll schliefslich für den Fall $\mu \gtrless 0$ für $F(z)$ noch eine neue Funktion eingeführt werden, nämlich

$$\varphi(z) = F\left(z - \frac{A}{\mu}\right);$$

$\varphi(z)$ wird dann den Gleichungen genügen:

$$(2) \qquad \alpha)\ \varphi(z+1) = \varphi(z); \qquad \beta)\ \varphi(z+\tau) = e^{2\mu\pi\imath z} \cdot \varphi(z).$$

Lehrsatz: *Wenn die Funktionen $F(z)$ resp. $\varphi(z)$, welche den Gleichungen* (1) *resp.* (2) *genügen, im Endlichen nur aufserwesentliche Singularitäten [Pole] besitzen, so ist die Zahl μ gleich der Anzahl der Unendlichkeitspunkte, vermindert um die Anzahl der Nullpunkte von $F(z)$ resp. $\varphi(z)$ innerhalb eines Periodenparallelogramms.*

Der Beweis braucht nur für die Funktionen $F(z)$ erbracht zu werden. Man bilde zum Beweise das Integral

$$\frac{1}{2\pi\iota}\int \frac{F'(z)}{F(z)}\cdot dz,$$

erstreckt über die Begrenzung eines Periodenparallelogramms, auf dessen Seiten, wie angenommen werden soll und darf, keine Unstetigkeitspunkte von $F(z)$, also auch keine Unstetigkeitspunkte von $F'(z)$ liegen. Nun erfüllt $F'(z)$ die Relationen

$$F'(z+1)=F'(z); \quad F'(z+\tau)=e^{2\pi i(\mu z+A)}\{F'(z)+2\mu\pi\iota F(z)\},$$

also erfüllt

$$\frac{F'(z)}{F(z)}=R(z)$$

die beiden Relationen:

(3) $\quad \alpha)\ R(z+1)=R(z); \quad \beta)\ R(z+\tau)=R(z)+2\mu\pi\iota.$

Ferner ist, wenn die eine Ecke des Periodenparallelogramms mit a bezeichnet wird:

$$(4)\qquad \int R(z)\,dz=\int_a^{a+1} R(z)\,dz+\int_{a+1}^{a+1+\tau} R(z)\,dz+\int_{a+1+\tau}^{a+\tau} R(z)\,dz+\int_{a+\tau}^{a} R(z)\,dz.$$

Vermöge der Gleichung (3α) hebt sich das zweite Integral auf der rechten Seite gegen das vierte fort. Vermöge (3β) kann das dritte Integral, indem darin $z=u+\tau$ gesetzt wird, auf die Form gebracht werden

$$\int_{a+1}^{a} R(z)\,dz+\int_{a+1}^{a} 2\mu\pi\iota\,dz.$$

Das erste dieser Integrale hebt sich gegen das erste der Integrale auf der rechten Seite von (4) fort. Es folgt also schliefslich, dafs

$$\int R(z)\,dz=\int_{a+1}^{a} 2\mu\pi\iota\,dz=-2\mu\pi\iota$$

ist, also

$$(5)\qquad \frac{1}{2\pi\iota}\int R(z)\,dz=-\mu.$$

Andrerseits aber ist derselbe Ausdruck, wie aus der Theorie der komplexen Integrale bekannt, gleich der Summe der Residuen von $\frac{F'(z)}{F(z)}$

inbezug auf die Unstetigkeitspunkte im Innern des Periodenparallelogramms. Nun möge $F(z)$ im Innern des Paralellogramms die Nullstellen $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_p$ und die Pole $\beta_1, \beta_2, \ldots \beta_r$ besitzen, und zwar sei in der Umgebung von α_i

$$F(z) = A_{h_i}(z - \alpha_i)^{h_i} + \cdots$$

Dann wird

$$F'(z) = h_i A_{h_i}(z - \alpha_i)^{h_i - 1} + \cdots$$

$$R(z) = \frac{h_i}{z - \alpha_i} + \text{steig. Pot. von } (z - \alpha_i).$$

Sei ferner in der Umgebung von β_k

$$F(z) = \frac{B_{l_k}}{(z - \beta_k)^{l_k}} + \cdots,$$

so wird

$$R(z) = \frac{-l_k}{(z - \beta_k)} + \text{steig. Pot. von } (z - \beta_k).$$

Es wird also die Summe der Residuen inbezug auf die Pole im Parallelogramm gleich

$$\sum h_i - \sum l_k,$$

sodafs man mit Hülfe von (5) erhält:

$$\sum l_k - \sum h_i = \mu,$$

womit der Lehrsatz bewiesen ist. Es lassen sich aus demselben folgende wichtige Folgerungen ziehen:

Ist $\mu > 0$, so wird auch immer $\sum l_k > 0$ sein müssen, d. h. wenn man mit m eine ganze *positive* Zahl bezeichnet:

Es giebt keine *ganze* transcendente Function $F(z)$, welche den Gleichungen Genüge leistet

$$(6) \qquad F(z + 1) = F(z); \quad F(z + \tau) = e^{2\pi\imath(mz + A)} \cdot F(z).$$

Dagegen giebt es sowohl *ganze, als auch gebrochene* Funktionen, welche den Gleichungen Genüge leisten

$$(7) \qquad F(z + 1) = F(z); \quad F(z + \tau) = e^{-2\pi\imath(mz - A)} \cdot F(z).$$

Die gebrochenen transcendenten Funktionen, welche den Gleichungen (7) genügen, unterscheiden sich von denjenigen, welche den Gleichungen (6) genügen, dadurch, dafs bei den ersteren die Anzahl der Pole die der Nullstellen um m übertrifft, während bei den letzteren die Anzahl der Nullstellen die der Pole um m übertrifft.

Lehrsatz: *Zwischen den p Nullstellen $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_p$ und den $p + \mu$ Polen $\beta_1, \beta_2, \ldots \beta_{p+\mu}$ einer eindeutigen Funktion $\varphi(z)$, welche den*

Gleichungen (2) *genügt und aufser den Polen im Endlichen keine weiteren Singularitäten besitzt, besteht die Beziehung*

$$(8) \qquad \sum \alpha_i - \sum \beta_k + \frac{\mu}{2} = n - n'\tau,$$

wobei n und n' ganze Zahlen bedeuten.

Beweis: Man betrachte das Integral

$$\frac{1}{2\pi\iota}\int \frac{\varphi'(z)}{\varphi(z)} \cdot z \cdot dz,$$

wiederum erstreckt über die Begrenzung eines Periodenparallelogramms. Die Funktion $\frac{\varphi'(z)}{\varphi(z)}$ wird dieselben Relationen erfüllen, wie vorhin die Funktion $\frac{F'(z)}{F(z)}$, nur dafs jetzt $A = 0$ zu setzen ist. Die Funktion

$$\frac{\varphi'(z)}{\varphi(z)} \cdot z = S(z)$$

erfüllt daher folgende Relationen:

$$S(z+1) = \frac{\varphi'(z+1)}{\varphi(z+1)} \cdot (z+1) = S(z) + \frac{\varphi'(z)}{\varphi(z)}$$

$$S(z+\tau) = \frac{\varphi'(z+\tau)}{\varphi(z+\tau)} \cdot (z+\tau) = S(z) + \tau\frac{\varphi'(z)}{\varphi(z)} + 2\mu\pi\iota(z+\tau).$$

Nun ist wieder

$$(9) \qquad \int S(z)\,dz = \int_a^{a+1} S(z)\,dz + \int_{a+1}^{a+1+\tau} S(z)\,dz + \int_{a+1+\tau}^{a+\tau} S(z)\,dz + \int_{a+\tau}^{a} S(z)\,dz.$$

Setzt man im zweiten Integral auf der rechten Seite $z = u + 1$, so geht dasselbe über in

$$\int_a^{a+\tau} S(u)\,du + \int_a^{a+\tau} \frac{\varphi'(u)}{\varphi(u)}\,du.$$

Das erste dieser Integrale hebt sich gegen das vierte auf der rechten Seite von (9) fort. Setzt man ferner in dem dritten Integral auf der rechten Seite von (9) $z = u + \tau$, so geht dasselbe über in

$$\int_{a+1}^{a} S(u)\,du + \tau\int_{a+1}^{a} \frac{\varphi'(u)}{\varphi(u)}\,du + 2\mu\pi\iota\int_{a+1}^{a} (u+\tau)\,du.$$

Das erste dieser Integrale hebt sich gegen das erste Integral auf der rechten Seite von (9). Es bleibt also das Resultat:

$$\int S(z)\,dz = \int_a^{a+\tau} \frac{\varphi'(u)}{\varphi(u)}\,du + \tau\int_{a+1}^{a} \frac{\varphi'(u)}{\varphi(u)}\,du + 2\mu\pi\iota\int_{a+1}^{a} u\,du + 2\mu\pi\iota\tau\int_{a+1}^{a} du$$

$$= [\log\varphi(u)]_a^{a+\tau} - \tau\,[\log\varphi(u)]_a^{a+1} - 2a\mu\pi\iota - \mu\pi\iota - 2\mu\pi\iota\tau.$$

Da nun $\varphi(a+1)=\varphi(a)$ ist, so wird $[\log\varphi(u)]_a^{a+1}$ gleich $2n_1\pi\iota$ sein müssen, wo n_1 eine ganze Zahl bedeutet, die abhängig ist von der Zahl der Umläufe, welche $\varphi(u)$ um den Nullpunkt machen wird, während u von a auf $a+1$ wächst. Da ferner

$$\varphi(a+\tau)=e^{2\mu\pi\iota a}\varphi(a);\quad \log\varphi(a+\tau)=\log\varphi(a)+2\mu\pi\iota a$$

sein mufs, so wird $[\log\varphi(u)]_a^{a+\tau}=2\mu\pi\iota a+2n\pi\iota$ sein, wo n gleichfalls eine ganze Zahl bedeutet. Es folgt also schliefsich

$$(10)\qquad \int S(z)\,dz=2n\pi\iota-2n_1\pi\iota\tau-\mu\pi\iota-2\mu\pi\iota\tau$$

$$\frac{1}{2\pi\iota}\int S(z)\,dz=n-\frac{\mu}{2}-n'\tau,$$

wo $n'=n_1+\mu$ gesetzt wurde. Andererseits ist aber das zu betrachtende Integral gleich der Summe der Residuen von $S(z)$ inbezug auf die Pole dieser Funktion im Periodenparallelogramm. Die Entwickelungen von $\frac{\varphi'(z)}{\varphi(2)}$ in der Umgebung eines Poles waren schon oben gefunden. Folglich wird $S(z)$ in der Umgebung von α_i die Entwickelung zulassen.

$$S(z)=\frac{\alpha_i h_i}{z-\alpha_i}+\text{steig. Pot. von }(z-\alpha_i).$$

Ganz analog wird in der Umgebung von β_k

$$S(z)=\frac{-\beta_k l_k}{z-\beta_k}+\text{steig. Pot. von }(z-\beta_k).$$

Es wird demgemäfs

$$\frac{1}{2\pi\iota}\int S(z)\,dz=\sum h_i\alpha_i-\sum l_k\beta_k.$$

Schreibt man jetzt statt $\sum h_i\alpha_i-\sum l_k\beta_k$ einfach $\sum\alpha_i-\sum\beta_k$, wo bei der neuen Summation eine Gröfse α_i resp. β_k so oft als Summand zu setzen ist, als die Ordnung des Verschwindens resp. Unendlichwerdens von $\varphi(z)$ im Punkte α_i resp. β_k angiebt, so wird

$$\sum_1^p\alpha_i-\sum_1^{p+\mu}\beta_k=\frac{1}{2\pi\iota}\int S(z)\,dz.$$

Aus dieser Gleichung folgt in Verbindung mit (10) die Formel (8) unmittelbar.

Lehrsatz: *Jede Funktion $\varphi(z)$, welche den Gleichungen (2) genügt, und welche die Nullstellen $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_p$ und die Pole $\beta_1, \beta_2 \ldots \beta_{p+\mu}$ besitzt, welche der Gleichung (8) genügen, und aufser diesen Polen im*

Endlichen keine weiteren Singularitäten, kann dargestellt werden in der Form:

$$(11) \qquad \varphi(z) = \frac{C \cdot e^{(2n'-\mu)\pi\imath z} \cdot \vartheta_1(z-\alpha_1) \cdot \vartheta_1(z-\alpha_2) \cdots \vartheta_1(z-\alpha_p)}{\vartheta_1(z-\beta_1) \cdot \vartheta_1(z-\beta_2) \cdots \cdots \vartheta_1(z-\beta_{p+\mu})}.$$

Beweis: Es sei

$$\psi(z) = \frac{e^{(2n'-\mu)\pi\imath z} \cdot \vartheta_1(z-\alpha_1) \cdot \vartheta_1(z-\alpha_2) \cdots \vartheta_1(z-\alpha_p)}{\vartheta_1(z-\beta_1) \cdot \vartheta_1(z-\beta_2) \cdots \vartheta_1(z-\beta_{p+\mu})}.$$

Dann wird

$$\psi(z+1) = \psi(z); \qquad \psi(z+\tau) = e^{2\mu\pi\imath z + 2n'\pi\imath\tau + 2\pi\imath\left(\Sigma\alpha_i - \Sigma\beta_k + \frac{\mu}{2}\right)} \cdot \psi(z),$$

also vermöge der Formel (8)

$$\psi(z+\tau) = e^{2\mu\pi\imath z} \cdot \psi(z).$$

D. h. $\psi(z)$ erfüllt dieselben Relationen, wie $\varphi(z)$. Folglich wird der Quotient $\frac{\varphi(z)}{\psi(z)}$ eine doppeltperiodische Funktion erster Gattung sein. Dieser Quotient hat aber die Eigentümlichkeit, dafs er eine ganze Funktion von z ist. Eine ganze doppeltperiodische Funktion erster Gattung aber ist bekanntlich ein Constante. Also ist

$$\varphi(z) = C \cdot \psi(z),$$

womit Gleichung (11) als richtig erwiesen ist. Man findet leicht, dafs für die Funktionen $F(z)$, welche den Gleichungen (1) genügen, folgende Entwickelung besteht:

$$F(z) = \frac{C_1 \cdot e^{(2n'-\mu)\pi\imath z} \cdot \vartheta_1(z-a_1) \cdot \vartheta_1(z-a_2) \ldots \vartheta_1(z-a_p)}{\vartheta_1(z-b_1) \cdot \vartheta_1(z-b_2) \ldots \vartheta_1(z-b_{p+\mu})},$$

wo die Gröfse n' sich aus der Gleichung ergiebt:

$$\sum a_i - \sum b_k - A + \frac{\mu}{2} = n - n'\tau.$$

§ 2.

Allgemeine Betrachtungen über die Entwicklung der behandelten Funktionen in Fouriersche Reihen.

Es sollen jetzt die betrachteten Funktionen in trigonometrische Reihen entwickelt werden. Nach dem letzten Lehrsatz des § 1 kann die Aufgabe auch so gestellt werden: Es soll der Quotient zweier Produkte von Thetafunktionen in eine trigonometrische Reihe entwickelt werden.

Für den Fall $\mu = 0$, d. h. für die doppeltperiodischen Funktionen zweiter Gattung ist die trigonometrische Entwicklung bereits vor

längerer Zeit von Hermite angegeben. Und zwar fand Hermite für die Funktion

$$\varphi(z) = \frac{\vartheta_1(z-a_1)\,.\,\vartheta_1(z-a_2)\ldots\vartheta_1(z-a_p)}{\vartheta_1(z-b_1)\,.\,\vartheta_1(z-b_2)\ldots\vartheta_1(z-b_p)}$$

wenn er noch zur Abkürzung

$$\sum a_i - \sum b_k = A$$

setzte, die folgende Formel, bei der aber alle b als von einander verschieden vorausgesetzt werden müssen:

(12) $$-\vartheta_1(A)\varphi(z)$$

$$= \sum_1^p{}_k \left[\frac{\vartheta_1(b_k-a_1)\vartheta_1(b_k-a_2)\ldots\vartheta_1(b_k-a_p)}{\vartheta_1(b_k-b_1)\ldots\vartheta_1(b_k-b_{k-1})\vartheta_1(b_k-b_{k+1})\ldots\vartheta_1(b_k-b_p)} \cdot \frac{\vartheta_1(z-A-b_k)}{\vartheta_1(z-b_k)} \right].$$

Vermittelst dieser Formel ist das Problem, die Funktion $\varphi(z)$ in eine Fouriersche Reihe zu entwickeln, auf das einfachere Problem reduciert, die Funktion $\frac{\vartheta_1(z-A-b_k)}{\vartheta_1(z-b_k)}$ in eine solche Reihe zu entwickeln. Auf letzteres Problem werden wir weiter unten noch zurückkommen. Für den Fall, dafs $\varphi(z)$ *mehrfache* Pole hat, werde auf die Betrachtungen verwiesen, die Appell in seiner oben citierten Arbeit angestellt hat.

Wir haben uns nur beschäftigen mit Ausdrücken von der Form

(13) $$\frac{\vartheta_1(z-a_1)\vartheta_1(z-a_2)\ldots\vartheta_1(z-a_p)}{\vartheta_1(z-b_1)\vartheta_1(z-b_2)\ldots\vartheta_1(z-b_{p+\mu})},$$

wo μ sowohl >0, als auch <0 sein kann. Es soll nur der Fall behandelt werden, dafs sämmtliche Nenner von (13) von einander verschieden sind, indem für den entgegengesetzten Fall wieder auf die eben erwähnte Appellsche Arbeit zu recurrieren ist.

Es kann nun nach den oben citierten Arbeiten des Herrn Prof. Krause*) unser Problem darauf reduciert werden, zwei specielle Funktionen, nämlich die beiden Funktionen

$$\frac{\vartheta_\alpha(nv+na,\,n\tau)}{\vartheta_\beta(v,\,\tau)} \quad \text{und} \quad \frac{\vartheta_3(v-a,\,\tau)}{\vartheta_3(v-b,\,\tau)} \cdot \frac{1}{\vartheta_3(nv,\,n\tau)}$$

in trigonometrische Reihen zu entwickeln. Es soll in der vorliegenden

*) Vgl. „Math. Annalen“ 30. Band, pag. 425ff.

Arbeit die erste dieser beiden Funktionen auf verschiedene Weise in Fouriersche Reihen entwickelt und die verschiedenen Entwickelungen mit einander verglichen werden.

Zweiter Abschnitt.

Herstellung und Vergleichung der verschiedenen trigonometrischen Reihen für die Funktionen $\frac{\vartheta_\alpha(nu+na, n\tau)}{\vartheta_\beta(u, \tau)}$.

§ 1.

Erste Form der Fourierschen Reihen für die Funktionen $\frac{\vartheta_\alpha(nu+na, n\tau)}{\vartheta_\beta(u, \tau)}$.

Man überzeugt sich leicht, dafs das allgemeine Problem, die Funktionen

$$\frac{\vartheta_\alpha(nu+na, n\tau)}{\vartheta_\beta(u, \tau)} \tag{14}$$

in trigonometrische Reihen zu entwickeln, durch Substitution halber Perioden gelöst werden kann, wenn es nur gelungen ist, *eine* der sechszehn Funktionen, welche den Typus (14) haben, in eine solche Reihe zu entwickeln. Man kann also statt des allgemeinen Problems etwa das speciellere stellen, die Funktion $\frac{\vartheta_0(nu+na, n\tau)}{\vartheta_0(u, \tau)}$ in eine Fouriersche Reihe zu entwickeln. Die letztere Aufgabe ist nun in den citierten Arbeiten des Herrn Prof. Krause ausführlich behandelt, und zwar findet sich dort zunächst das Resultat, dafs, wenn man ansetzt

$$\frac{\vartheta_0(nu+na, n\tau)}{\vartheta_0(u, \tau)} = \sum_0^{n-2}{}_k \sum_{-\infty}^{+\infty}{}_r a^{(00)}_{k+(n-1)r} e^{2[k+(n-1)r]\pi\iota u}, \tag{15}$$

was jedenfalls erlaubt ist, sich zwischen den Coefficienten $a^{(00)}$ folgende Recursionsformeln aufstellen lassen:*)

$$\begin{aligned} a^{(00)}_{k+(n-1)r} &= \lambda^{2r} \cdot q^{r^2(n-1)+2kr} \cdot a^{(00)}_k \\ &\quad - 2\pi\iota \frac{\vartheta_1(na, n\tau)}{\vartheta_1'} \lambda^{2r} \cdot q^{r^2(n-1)+(2r-1)k} \sum_0^{r-1}{}_\mu \Big[\lambda^{-(2\mu+1)} \\ &\quad \cdot q^{-\left(\mu+\frac{1}{2}\right)^2(n-1)-2k\mu} \Big], \end{aligned} \tag{16a}$$

*) „Math. Annalen“ 32. Band, pag. 335 ff.

$$(16\,b)\quad a^{(00)}_{k-(n-1)r} = \lambda^{-2r}\cdot q^{r^2(n-1)-2kr}\, a^{(00)}_{k} + 2\pi\iota\,\frac{\vartheta_1(na,\,n\tau)}{\vartheta_1'}\cdot\lambda^{-2r}\cdot q^{r^2(n-1)-(2r-1)k}\sum_{0}^{r-1}\Big[\lambda^{2\mu+1}\cdot q^{-\left(\mu+\frac{1}{2}\right)^2(n-1)+2k\mu}\Big],$$

wobei k eine beliebige ganze Zahl, r dagegen eine *positive* ganze Zahl bedeutet und zur Abkürzung

$$q = e^{\pi\iota\tau}; \qquad \lambda = e^{na\pi\iota}$$

gesetzt wurde. Die Formeln (16a) und (16b) zeigen, dafs das Problem, *alle* Coefficienten in der trigonometrischen Reihe für die Funktion $\frac{\vartheta_0(nu+na,\,n\tau)}{\vartheta_0(u,\,\tau)}$ zu bestimmen, sich zurückführen läfst auf die einfachere Aufgabe, *die* $n-1$ *Coefficienten*

$$a^{(00)}_0,\ a^{(00)}_1,\ a^{(00)}_2,\ \ldots\ a^{(00)}_{n-2}$$

zu bestimmen. Diese letzteren $n-1$ *Gröfsen aber können weder mittelst der Formeln* (16) *noch mittelst der zur Herstellung dieser Formeln angewandten Methode bestimmt werden.* Auch eine Reihe anderer, in den Arbeiten des Herrn Prof. Krause angewandter Methoden zur Herstellung der Fourierschen Entwicklung für die Funktion

$$\frac{\vartheta_0(nu+na,\,n\tau)}{\vartheta_0(u,\,\tau)}$$

führen zu demselben Resultat, dafs in den fertigen Formeln $n-1$ unbekannte Constante auftreten. Im Übrigen sind die Resultate bei den einzelnen Methoden ihrer Form nach durchaus von einander verschieden, aber die Zurückführung dieser Resultate auf einander ist bereits durchgeführt. Es möge schliefslich noch bemerkt werden, dafs die Entwicklung (15) Gültigkeit besitzt in einem unendlich langen Streifen, der von zwei durch die Punkte $-\frac{\tau}{2}$ und $+\frac{\tau}{2}$ gezogenen Parallelen zur reellen Axe begrenzt wird.

Es sollen jetzt für die fünfzehn andern Funktionen, welche in dem Typus (14) enthalten sind, die entsprechenden Formeln hergestellt werden. Aus der Gleichung (15) folgt durch Substitution von $a+\frac{1}{2n}$ an Stelle von a:

$$(17)\qquad \frac{\vartheta_3(nu+na,\,n\tau)}{\vartheta_0(u,\,\tau)} = \sum_{0}^{n-2}\sum_{-\infty}^{+\infty}{}_{r}\, a^{(30)}_{k+(n-1)r}\, e^{2[k+(n-1)r]\pi\iota u};$$

die Relationen, welche dabei die Gröfsen $a^{(30)}_{k+(n-1)r}$ erfüllen, wird man

aus den Formeln (16a) und (16b) erhalten, indem man darin $a + \frac{1}{2n}$ an Stelle von a setzt, durch welche Substitution λ in $i\lambda$ übergeht. Es ergiebt sich

$$(18a)\quad \begin{cases} a^{(30)}_{k+(n-1)r} = (-1)^r \lambda^{2r} q^{r^2(n-1)+2kr} a^{(30)}_k - 2\pi(-1)^r \cdot \frac{\vartheta_2(na, n\tau)}{\vartheta_1'} \\ \qquad \cdot \lambda^{2r} \cdot q^{r^2(n-1)+(2r-1)k} \sum_0^{r-1}{}^{\mu} \Big[(-1)_\mu \lambda^{-(2\mu+1)} \\ \qquad \cdot q^{-\left(\mu+\frac{1}{2}\right)^2 (n-1)-2k\mu} \Big], \end{cases}$$

$$(18b)\quad \begin{cases} a^{(30)}_{k-(n-1)r} = (-1)^r \cdot \lambda^{-2r} q^{r^2(n-1)-2kr} a^{(30)}_k - 2\pi(-1)^r \cdot \frac{\vartheta_2(na, n\tau)}{\vartheta_1'} \\ \qquad \cdot \lambda^{-2r} \cdot q^{r^2(n-1)-(2r-1)k} \sum_0^{r-1}{}^{\mu} \Big[(-1)^\mu \lambda^{2\mu+1} \\ \qquad \cdot q^{-\left(\mu+\frac{1}{2}\right)^2 (n-1)+2k\mu} \Big]. \end{cases}$$

Setzt man ferner in Gleichung (15) $a + \frac{\tau}{2}$ an Stelle von a, so erhält man:

$$\frac{\vartheta_1(nu + na, n\tau)}{\vartheta_0(u, \tau)}\, iq^{-\frac{n}{4}} e^{-n\pi iu - n\pi ia} = \sum_0^{n-2} \sum_{-\infty}^{+\infty}{}_r \Big[a^{(00)}_{k+(n-1)r} \Big(a + \tfrac{\tau}{2}\Big) \cdot e^{2[k+(n-1)r]\pi iu} \Big],$$

wobei die Bezeichnung $a^{(00)}_{k+(n-1)r}\left(a + \frac{\tau}{2}\right)$ die Bedeutung hat, dafs in der Gröfse $a^{(00)}_{k+(n-1)r}$, aufgefafst als Funktion von a, $a + \frac{\tau}{2}$ an Stelle von a zu setzen ist. Die letzte Gleichung läfst sich auch schreiben

$$(19)\quad \begin{cases} \frac{\vartheta_1(nu + na, n\tau)}{\vartheta_0(u, \tau)} = \sum_0^{n-2} \sum_{-\infty}^{+\infty}{}_r \Big[\frac{1}{i} \lambda q^{\frac{n}{4}} a^{(00)}_{k+(n-1)r} \Big(a + \tfrac{\tau}{2}\Big) \\ \qquad \cdot e^{[2k+1+(n-1)(2r+1)]\pi i u} \Big] \\ \qquad = \sum_0^{n-2} \sum_{-\infty}^{+\infty}{}_r a^{(10)}_{k+(n-1)r} \cdot e^{[2k+1+(n-1)(2r+1)]\pi iu}, \end{cases}$$

wobei dann

$$a^{(10)}_{k+(n-1)r} = \frac{1}{i} \lambda q^{\frac{n}{4}} \cdot a^{(00)}_{k+(n-1)r} \Big(a + \tfrac{\tau}{2}\Big)$$

ist. Man leitet aus dieser Beziehung leicht folgende Recursionsformeln ab, indem man in den Gleichungen (16a) und (16b) $a + \frac{\tau}{2}$ an Stelle von a setzt:

$$a^{(10)}_{k+(n-1)r} = \lambda^{2r} \cdot q^{r^2(n-1)+nr+2kr}\, a^{(10)}_k$$
$$- 2\pi\iota \frac{\vartheta_0(na, n\tau)}{\vartheta_1'} \lambda^{2r} q^{r^2(n-1)+nr+(2r-1)k} \sum_0^{r-1\mu} \Big[\lambda^{-(2\mu+1)}$$
$$\cdot q^{-\left(\mu+\frac{1}{2}\right)^2(n-1)-(2\mu+1)\frac{n}{2}-2k\mu}\Big],$$

oder, wie man durch eine einfache Transformation erhält:

$$a^{(10)}_{k+(n-1)r} = \lambda^{2r} q^{r^2(n-1)+nr+2kr}\, a^{(10)}_k$$
$$- 2\pi\iota \frac{\vartheta_0(na, n\tau)}{\vartheta_1'} \cdot \lambda^{2r} q^{r^2(n-1)+nr+(2r-1)k+\frac{n-3}{4}} \sum_0^{r-1\mu} \Big[\lambda^{-(2\mu+1)}$$
$$\cdot q^{-(\mu+1)^2(n-1)-(2k+1)\mu}\Big],$$

oder endlich, indem man $\mu - 1$ an Stelle von μ setzt:

(20a)
$$\left\{\begin{aligned} a^{(10)}_{k+(n-1)r} &= \lambda^{2r} q^{r^2(n-1)+nr+2kr}\, a^{(10)}_k \\ &-2\pi i \frac{\vartheta_0(na, n\tau)}{\vartheta_1'} \cdot \lambda^{2r} q^{r^2(n-1)+nr+(2r+1)k+\frac{n+1}{4}} \sum_1^{r\mu} \Big[\lambda^{-(2\mu-1,} \\ &\cdot q^{-\mu^2(n-1)-(2k+1)\mu}\Big]. \end{aligned}\right.$$

Ganz analog findet man:

(20b)
$$\left\{\begin{aligned} a^{(10)}_{k-(n-1)r} &= \lambda^{-2r} q^{r^2(n-1)-nr-2kr}\, a^{(10)}_k \\ &+2\pi\iota \frac{\vartheta_0(na, n\tau)}{\vartheta_1'} \cdot \lambda^{-2r} \cdot q^{r^2(n-1)-nr-(2r-1)k+\frac{n+1}{4}} \sum_0^{r-1\mu} \Big[\lambda^{2\mu+1} \\ &\cdot q^{-\mu^2(n-1)+(2k+1)\mu}\Big]. \end{aligned}\right.$$

Setzt man in Gleichung (19) $a + \frac{1}{2n}$ an Stelle von a, so erhält man:

(21)
$$\frac{\vartheta_2(nu+na, n\tau)}{\vartheta_0(u, \tau)} = \sum_0^{n-2k} \sum_{-\infty}^{+\infty r} a^{(20)}_{k+(n-1)r} \cdot e^{[2k+1+(n-1)(2r+1)]\pi\iota u},$$

wobei dann die Recursionsformeln statthaben:

(22a)
$$\left\{\begin{aligned} a^{(20)}_{k+(n-1)r} &= (-1)^r \lambda^{2r} \cdot q^{r^2(n-1)+nr+2kr}\, a^{(20)}_k + 2\pi(-1)^r \frac{\vartheta_3(na, n\tau)}{\vartheta_1'} \\ &\cdot \lambda^{2r} \cdot q^{r^2(n-1)+nr+(2r+1)k+\frac{n+1}{4}} \sum_1^{r\mu} \Big[(-1)^\mu \lambda^{-(2\mu-1)} \\ &\cdot q^{-\mu^2(n-1)-(2k+1)\mu}\Big]. \end{aligned}\right.$$

(22b)
$$\left\{\begin{aligned} a^{(20)}_{k-(n-1)r} &= (-1)^r \cdot \lambda^{-2r} \cdot q^{r^2(n-1)-nr-2kr}\, a^{(20)}_k - 2\pi(-1)^r \frac{\vartheta_3(na, n\tau)}{\vartheta_1'} \\ &\cdot \lambda^{-2r} \cdot q^{r^2(n-1)-nr-(2r-1)k+\frac{n+1}{4}} \sum_0^{r-1\mu} \Big[(-1)^\mu \lambda^{2\mu+1} \\ &\cdot q^{-\mu^2(n-1)+(2k+1)\mu}\Big]. \end{aligned}\right.$$

Jetzt möge in Gleichung (15) $u + \frac{\tau}{2}$ an Stelle von u gesetzt werden. Dann ergiebt sich

$$\frac{\vartheta_1(nu+na, n\tau)\cdot q^{-\frac{n}{4}} e^{-n\pi iu - n\pi\iota a}}{\vartheta_1(u,\tau)\cdot q^{-\frac{1}{4}} e^{-\pi iu}} = \sum_0^{n-2}{}_k \sum_{-\infty}^{+\infty}{}_r a^{(00)}_{k+(n-1)r}\cdot q^{k+(n-1)r} e^{2[k+(n-1)r]\pi\iota u},$$

oder

$$(23)\quad \begin{cases} \dfrac{\vartheta_1(nu+na, n\tau)}{\vartheta_1(u,\tau)} = q^{\frac{n-1}{4}}\cdot\lambda \displaystyle\sum_0^{n-2}{}_k \sum_{-\infty}^{+\infty}{}_r \Big[a^{(00)}_{k+(n-1)r} \\ \qquad\qquad \cdot q^{k+(n-1)r} e^{[2k+(2r+1)(n-1)]\pi\iota u}\Big] \\ \qquad\qquad = \displaystyle\sum_0^{n-2}{}_k \sum_{-\infty}^{+\infty}{}_r a^{(11)}_{k+(n-1)r}\cdot e^{[2k+(2r+1)(n-1)]\pi\iota u}, \end{cases}$$

wobei dann

$$a^{(11)}_{k+(n-1)r} = \lambda q^{\frac{n-1}{4}+k+(n-1)r} a^{(00)}_{k+(n-1)r}$$

ist. Es ergeben sich also für die Gröfsen $a^{(11)}_{k+(n-1)r}$ folgende Recursionsformeln:

$$(24\text{a})\quad \begin{cases} a^{(11)}_{k+(n-1)r} = \lambda^{2r} q^{r^2(n-1)+(n-1)r+2kr}\cdot a^{(11)}_k - 2\pi\iota\,\dfrac{\vartheta_1(na, n\tau)}{\vartheta_1'} \\ \qquad\qquad \cdot \lambda^{2r}\cdot q^{r^2(n-1)+2kr+(n-1)r+\frac{n-1}{4}} \displaystyle\sum_0^{r-1}{}_\mu \Big[\lambda^{-2\mu} \\ \qquad\qquad \cdot q^{-\left(\mu+\frac{1}{2}\right)^2(n-1)-2k\mu}\Big], \end{cases}$$

$$(24\text{b})\quad \begin{cases} a^{(11)}_{k-(n-1)r} = \lambda^{-2r}\cdot q^{r^2(n-1)-(n-1)r-2kr} a^{(11)}_k + 2\pi i\,\dfrac{\vartheta_1(na, n\tau)}{\vartheta_1'} \\ \qquad\qquad \cdot \lambda^{-2r}\cdot q^{r^2(n-1)-2kr+2k-(n-1)r+\frac{n-1}{4}} \displaystyle\sum_0^{r-1}{}_\mu \Big[\lambda^{2\mu+2} \\ \qquad\qquad \cdot q^{-\left(\mu+\frac{1}{2}\right)^2(n-1)+2k\mu}\Big]. \end{cases}$$

In der letzten Formel wird das dem Werte $\mu = r-1$ entsprechende Glied gleich $2\pi\iota\,\frac{\vartheta_1(na, n\tau)}{\vartheta_1'}$, also von r völlig unabhängig. Setzt man aus der Entwicklung von

$$\frac{\vartheta_1(nu+na, n\tau)}{\vartheta_1(u,\tau)}$$

alle diejenigen Glieder heraus, welche von diesem Schlufsgliede der Recursionsformel für $a^{(11)}_{k-(n-1)r}$ herrühren, so ergiebt dies die Summe:

$$(25) \qquad 2\pi\iota \frac{\vartheta_1(na, n\tau)}{\vartheta_1'} \sum_{0}^{n-2} \sum_{1}^{\infty} e^{[2k-(2r-1)(n-1)]\pi i u}.$$

Die Summation nach k ergiebt

$$\frac{1 - e^{2(n-1)\pi i u}}{1 - e^{2\pi i u}}.$$

Die Summation nach r darf in dem Ausdruck (25) wirklich ausgeführt werden; denn Betrachtungen einfachster Art zeigen, dafs unsere trigonometrische Reihe nur Gültigkeit besitzt für solche Punkte $u = x + iy$, für welche die mit i multiplicierte Gröfse y negativ ist und für welche ferner

$$| e^{-\pi i u} | < 1$$

ist. Die Ausführung der Summation nach r in (25) ergiebt:

$$\frac{e^{-(n-1)\pi\iota u}}{1 - e^{-2(n-1)\pi i u}} = \frac{e^{(n-1)\pi\iota u}}{e^{2(n-1)\pi\iota u} - 1}.$$

Man kann demnach für $\frac{\vartheta_1(nu + na, n\tau)}{\vartheta_1(u, \tau)}$ folgende trigonometrische Entwicklung ansetzen:

$$(26) \qquad \frac{\vartheta_1(nu + na, n\tau)}{\vartheta_1(u, \tau)} = \pi \frac{\vartheta_1(na, n\tau)}{\vartheta_1'} \cdot \frac{e^{(n-2)\pi i u}}{\sin \pi u} + \sum_{0}^{n-2} \sum_{-\infty}^{+\infty} b^{(11)}_{k+(n-1)r} \cdot e^{[2k+(2r+1)(n-1)]\pi i u},$$

wobei dann

$$b^{(11)}_{k+(n-1)r} = a^{(11)}_{k+(n-1)r}$$

$$b^{(11)}_{k-(n-1)r} = a^{(11)}_{k-(n-1)r} - 2\pi\iota \frac{\vartheta_1(na, n\tau)}{\vartheta_1'}$$

ist, sodafs für die Gröfsen $b^{(11)}$ sich folgende Recursionsformeln ergeben:

$$(27\,a) \begin{cases} b^{(11)}_{k+(n-1)r} = \lambda^{2r} q^{r^2(n-1)+(n-1)r+2kr} b^{(11)}_{k} \\ \qquad - 2\pi i \frac{\vartheta_1(na, n\tau)}{\vartheta_1'} \lambda^{2r} q^{\left(r+\frac{1}{2}\right)^2(n-1)+2kr} \sum_{0}^{r-1} \Big[\lambda^{-2\mu} \\ \qquad \cdot q^{-\left(\mu+\frac{1}{2}\right)^2(n-1)-2k\mu} \Big]. \end{cases}$$

$$(27\,b) \begin{cases} b^{(11)}_{k-(n-1)r} = \lambda^{-2r} \cdot q^{r^2(n-1)-(n-1)r-2kr} b^{(11)}_{k} \\ \qquad + 2\pi\iota \frac{\vartheta_1(na, n\tau)}{\vartheta_1'} \cdot \lambda^{-2r} \cdot q^{\left(r-\frac{1}{2}\right)^2(n-1)-2kr} \sum_{1}^{r-1} \Big[\lambda^{2\mu} \\ \qquad \cdot q^{-\left(\mu-\frac{1}{2}\right)^2(n-1)+2k\mu} \Big], \end{cases}$$

Indem man in (26) $a + \frac{1}{2n}$ an Stelle von a setzt, ergiebt sich:

$$(28)\quad \frac{\vartheta_2(nu+na,n\tau)}{\vartheta_1(u,\tau)} = \pi\,\frac{\vartheta_2(na,n\tau)}{\vartheta_1'}\cdot\frac{e^{(n-2)\pi\imath u}}{\sin\pi u} + \sum_0^{n-2}\sum_{-\infty}^{+\infty} b^{(21)}_{k+(n-1)r}\cdot e^{[2k+(2r+1)(n-1)]\pi\imath u},$$

wobei dann die Relationen bestehen werden:

$$(29\,a)\quad \begin{cases} b^{(21)}_{k+(n-1)r} = (-1)^r\lambda^{2r}q^{r^2(n-1)+(n-1)r+2kr}\,b^{(21)}_k \\ \quad -2\pi\imath(-1)^r\frac{\vartheta_2(na,n\tau)}{\vartheta_1'}\cdot\lambda^{2r}\cdot q^{\left(r+\frac12\right)^2(n-1)+2kr}\sum_0^{r-1}\Big[(-1)^\mu \\ \quad \cdot\lambda^{-2\mu}\cdot q^{-\left(\mu+\frac12\right)^2(n-1)-2k\mu}\Big], \end{cases}$$

$$(29\,b)\quad \begin{cases} b^{(21)}_{k-(n-1)r} = (-1)^r\cdot\lambda^{-2r}\cdot q^{r^2(n-1)-(n-1)r-2kr}\,b^{(21)}_k \\ \quad +2\pi\imath(-1)^r\frac{\vartheta_2(na,n\tau)}{\vartheta_1'}\cdot\lambda^{-2r}\cdot q^{\left(r-\frac12\right)^2(n-1)-2kr}\sum_1^{r-1}\Big[(-1)^\mu \\ \quad \cdot\lambda^{2\mu}\cdot q^{-\left(\mu-\frac12\right)^2(n-1)+2k\mu}\Big]. \end{cases}$$

Wird in Gleichung (25) $a - \frac{\tau}{2}$ an Stelle von a gesetzt, so ergiebt sich

$$-i\frac{\vartheta_0(nu+na,n\tau)}{\vartheta_1(u,\tau)}\,e^{n\pi\imath u+n\pi\imath a}\cdot q^{-\frac{n}{4}}$$
$$= -i\frac{\vartheta_0(na,n\tau)}{\vartheta_1'}\,e^{n\pi\imath a}q^{-\frac{n}{4}}\frac{e^{(n-2)\pi\imath u}}{\sin\pi u} + \sum_0^{n-2}\sum_{-\infty}^{+\infty}\Big[b^{(11)}_{k+(n-1)r}\left(a-\frac{\tau}{2}\right)\cdot e^{[2k+(2r+1)(n-1)]\pi\imath u}\Big]$$

oder

$$(30)\quad \begin{cases} \frac{\vartheta_0(nu+na,n\tau)}{\vartheta_1(u,\tau)} = \frac{\pi\vartheta_0(na,n\tau)}{\vartheta_1'}\,\frac{e^{-2\pi\imath u}}{\sin\pi u} \\ \quad +i\lambda^{-1}\cdot q^{\frac{n}{4}}\sum_0^{n-2}\sum_{-\infty}^{+\infty}\Big[b^{(11)}_{k+(n-1)r}\left(a-\frac{\tau}{2}\right) \\ \quad \cdot e^{[2k-1+2r(n-1)]\pi\imath u}\Big] \\ \quad = \frac{\pi\vartheta_0(na,n\tau)}{\vartheta_1'}\cdot\frac{e^{-2\pi\imath u}}{\sin\pi u} \\ \quad +\sum_0^{n-2}\sum_{-\infty}^{+\infty} b^{(01)}_{k+(n-1)r}\cdot e^{[2k-1+2r(n-1)]\pi\imath u}, \end{cases}$$

wobei dann

$$b^{(01)}_{k+(n-1)r} = iq^{\frac{n}{4}}\cdot\lambda^{-1}\,b^{(11)}_{k+(n-1)r}\left(a-\frac{\tau}{2}\right)$$

gesetzt wurde. Setzt man also in der Formel (27a) $a - \frac{\tau}{2}$ an Stelle von a, so erhält man folgende Recursionsformel für $b^{(01)}_{k+(n-1)r}$:

$$b^{(01)}_{k+(n-1)r} = q^{-nr}\cdot\lambda^{2r}\cdot q^{r^2(n-1)+(n-1)r+2kr}\,b^{(01)}_k$$
$$-2\pi i\left\{-i\,\frac{\vartheta_0(na,n\tau)}{\vartheta_1'}\,\lambda\cdot q^{-\frac{n}{4}}\right\} iq^{\frac{n}{4}}\lambda^{-1}\cdot\lambda^{2r}$$
$$\cdot q^{\left(r+\frac{1}{2}\right)^2(n-1)-nr+2kr}\sum_0^{r-1}{}_\mu\,\lambda^{-2\mu}\cdot q^{-\left(\mu+\frac{1}{2}\right)^2(n-1)+n\mu-2k\mu},$$

oder, wie eine einfache Rechnung ergiebt:

$$(31a)\quad\begin{cases} b^{(01)}_{k+(n-1)r} = \lambda^{2r}\,q^{r^2(n-1)+(2k-1)r}\cdot b^{(01)}_k \\ \qquad -2\pi i\,\frac{\vartheta_0(na,n\tau)}{\vartheta_1'}\cdot\lambda^{2r}\cdot q^{r^2(n-1)+(2k-1)r}\sum_0^{r-1}{}_\mu\Big[\lambda^{-2\mu} \\ \qquad\qquad \cdot q^{-\mu^2(n-1)-(2k-1)\mu}\Big]. \end{cases}$$

Ganz analog findet man:

$$(31b)\quad\begin{cases} b^{(01)}_{k-(n-1)r} = \lambda^{-2r}\cdot q^{r^2(n-1)-(2k-1)r}\cdot b^{(01)}_k \\ \qquad +2\pi\iota\,\frac{\vartheta_0(na,n\tau)}{\vartheta_1'}\cdot\lambda^{-2r}\cdot q^{r^2(n-1)-(2k-1)r}\sum_1^{r-1}{}_\mu\Big[\lambda^{2\mu} \\ \qquad\qquad \cdot q^{-\mu^2(n-1)+(2k-1)\mu}\Big]. \end{cases}$$

Setzt man in Gleichung (30) $a + \frac{1}{2n}$ an Stelle von a, so ergiebt sich:

$$(32)\quad \frac{\vartheta_3(nu+na,n\tau)}{\vartheta_1(u,\tau)} = \frac{\pi\vartheta_3(na,n\tau)}{\vartheta_1'}\,\frac{e^{-2\pi iu}}{\sin\pi u} + \sum_0^{n-2}{}_k\sum_{-\infty}^{+\infty}{}_r\, b^{(31)}_{k+(n-1)r}\,e^{[2k-1+2(n-1)r]\pi iu},$$

wobei dann die Coefficienten $b^{(31)}$ folgenden Relationen genügen werden:

$$(32a)\quad\begin{cases} b^{(31)}_{k+(n-1)r} = (-1)^r\cdot\lambda^{2r}\,q^{r^2(n-1)+(2k-1)r}\,b^{(31)}_k \\ \qquad -2\pi i\,\frac{\vartheta_3(na,n\tau)}{\vartheta_1'}(-1)^r\lambda^{2r}\cdot q^{r^2(n-1)+(2k-1)r}\sum_0^{r-1}{}_\mu\Big[(-1)^\mu \\ \qquad\qquad \cdot\lambda^{-2\mu}\,q^{-\mu^2(n-1)-(2k-1)\mu}\Big], \end{cases}$$

$$(33b)\quad\begin{cases} b^{(31)}_{k-(n-1)r} = (-1)^r\lambda^{-2r}\,q^{r^2(n-1)-(2k-1)r}\,b^{(31)}_k \\ \qquad +2\pi i\,\frac{\vartheta_3(na,n\tau)}{\vartheta_1'}(-1)^r\lambda^{-2r}\cdot q^{r^2(n-1)-(2k-1)r}\sum_1^{r-1}{}_\mu\Big[(-1)^\mu \\ \qquad\qquad \cdot\lambda^{2\mu}\cdot q^{-\mu^2(n-1)+(2k-1)\mu}\Big]. \end{cases}$$

Hiermit sind nun die Fourierschen Reihen für 8 Funktionen von dem Typus $\frac{\vartheta_\alpha(nu + na, n\tau)}{\vartheta_\beta(u, \tau)}$ gefunden. Man sieht aber sofort, dafs für die noch übrigen 8 Funktionen sich aus den obigen Gleichungen die Entwicklungen durch die Substitution $u + \frac{1}{2}$ für u ergeben. Und zwar werden hier sich verschiedene Formeln ergeben, je nachdem $n \equiv 0 \bmod 2$, oder $\equiv 1 \bmod 2$ sein wird. Jedenfalls aber ergeben sich die gesuchten Formeln aus unseren Gleichungen *ohne jede weitere Rechnung*, sodafs von einer weiteren Ausdehnung dieser Formelzusammenstellung füglich Abstand genommen werden kann.

§ 2.

Fouriersche Reihe für die Funktion $\frac{\vartheta_0(v + a)}{2\pi\vartheta_0(v)\vartheta_0(a)}$.

Zu anderen, als den eben gefundenen trigonometrischen Entwicklungen für die Funktionen $\frac{\vartheta_\alpha(nu + na, n\tau)}{\vartheta_\beta(u, \tau)}$ gelangt man durch die Multiplication zweier bekannten trigonometrischen Entwicklungen, wie die letzte der citierten Arbeiten des Herrn Prof. Krause zeigt*). Mit Rücksicht auf die später vorzunehmende Vergleichung der Resultate dürfte es aber bequemer sein, andere Reihen zur Multiplication zu verwenden, als es Herr Prof. Krause thut. Und zwar sollen zur Herstellung der trigonometrischen Reihe der Funktion

$$\frac{\vartheta_1(nu + na, n\tau)}{\vartheta_0(u, \tau)}$$

oder — indem man zu dieser Funktion noch einen von u unabhängigen Faktor hinzufügt — der Funktion

$$\frac{\vartheta_1'\vartheta_1'(0, n\tau)\,\vartheta_1(nu + na, n\tau)}{(2\pi)^2\vartheta_0(na, n\tau).\,\vartheta_0(u, \tau)}$$

die trigonometrischen Reihen der Funktionen

(34) $$\frac{\vartheta_1'(0, n\tau).\,\vartheta_1(nu + na, n\tau)}{2\pi\vartheta_0(na, n\tau)\,\vartheta_0(nu, n\tau)}$$

und

(35) $$\frac{\vartheta_1'\,\vartheta_0(nu, n\tau)}{2\pi\,\vartheta_0(u, \tau)}$$

mit einander multipliciert werden.

Es soll zunächst die Entwicklung der Funktion (34) ins Auge gefafst werden. Man sieht sofort, dafs diese Entwicklung bekannt ist, wenn die Fouriersche Reihe der Funktion

*) „Math. Annalen", Band 33, pag. 108 ff.

$$(36) \qquad \frac{\vartheta_1' \, \vartheta_1(v+a)}{2\pi \vartheta_0(v)\,\vartheta_0(a)}$$

bekannt ist. Diese letztere Entwicklung aber hat schon Hermite in seinen Betrachtungen, über doppelt periodische Funktionen zweiter Gattung gefunden*). Auch in der eben erwähnten Arbeit des Herrn Prof. Krause findet sich die Entwicklung angegeben. Hier möge zur Herstellung dieser Entwicklung noch eine neue Methode ihren Platz finden, bei der die Natur der Coefficienten besonders einfach und klar zu Tage tritt. Es soll, wie in der Arbeit des Herrn Prof. Krause, die Entwicklung in einer solchen Form gegeben werden, dafs die Funktion (36) zugleich als Funktion von v und a betrachtet wird und inbezug auf *beide* Variabele in eine Fouriersche Reihe entwickelt wird. Man sieht leicht, dafs man jedenfalls die Entwicklung ansetzen darf:

$$(37) \qquad \frac{\vartheta_1' \, \vartheta_1(v+a)}{2\pi \vartheta_0(v)\,\vartheta_0(a)} = \sum_{-\infty}^{+\infty} \sum_{-\infty}^{+\infty} d_{kr}\, e^{(2k+1)\pi\iota a + (2r+1)\pi\iota u}.$$

Diese Entwicklung, in der die Gröfsen d_{kr} *von a und von v unabhängige* Constante bedeuten, wird gültig sein für alle a und v, welche zwischen zwei, durch die Punkte $+\frac{\tau}{2}$ und $-\frac{\tau}{2}$ zur reellen Axe gezogenen Parallelen liegen.

Es folgt nun aus der Theorie der Fourierschen Reihen, dafs d_{kr} durch ein bestimmtes Doppelintegral dargestellt werden kann, und zwar wird

$$d_{kr} = \frac{1}{2 \cdot 2} \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} \frac{\vartheta_1' \, \vartheta_1(v+a)}{2\pi \vartheta_0(v)\,\vartheta_0(a)} \cdot e^{-(2k+1)\pi\iota a - (2r+1)\pi\iota v} \cdot dv \cdot da.$$

Aus den Formeln in der eben citierten Arbeit von Hermite aber folgt leicht, dafs

$$\frac{1}{2} \int_{-1}^{+1} \frac{\vartheta_1(v+a)}{\vartheta_0(v)} e^{-(2r+1)\pi\iota v}\, dv = \frac{2\pi i\, \vartheta_0(a)\, e^{-a\pi\iota} \cdot q^{\frac{2r+1}{2}}}{\vartheta_1'(1 - q^{-(2r+1)} \cdot e^{-2a\pi\iota})}$$

ist. Folglich wird

$$(38) \qquad d_{kr} = \frac{i}{2} \cdot q^{-\frac{2r+1}{2}} \cdot \int_{-1}^{+1} \frac{e^{-2(k+1)\pi\iota a} \cdot da}{1 - q^{-(2r+1)} \cdot e^{-2\pi\iota a}}.$$

Dieses letztere Integral geht, wie man sich unschwer überzeugt, durch die Substitution

---

*) Vgl. namentlich „Annales de l'Ecole Norm. Sup." 3e série, tome II. 1885.

$$e^{-2\pi i a} = x; \qquad da = \frac{e^{2\pi i a}}{-2\pi i} \cdot dx$$

über in das Integral:

$$-\frac{1}{2\pi i}\int \frac{x^k \cdot dx}{1 - q^{-(2r+1)} \cdot x};$$

und zwar ist dieses neue Integral *zweimal* über die Peripherie eines Kreises um den Nullpunkt der x-Ebene mit dem Radius 1 zu erstrecken in der Richtung des fortschreitenden Uhrzeigers. Bezeichnet man daher das in entgegengesetzter Richtung einmal über den Umfang dieses Kreises genommene geschlossene Integral mit $\int_{(0)} \cdots dx$, so wird nach (38)

$$d_{kr} = \frac{q^{-\frac{2r+1}{2}}}{2\pi} \int_{(0)} \frac{x^k \cdot dx}{1 - q^{-(2r+1)} \cdot x}. \tag{39}$$

Bei der Berechnung des letzteren geschlossenen Integrals sind 2 Fälle zu unterscheiden:

1) $r \geq 0$.

In diesem Falle wird der Punkt $x = q^{2r+1}$, der im Innern des eben definierten Kreises liegen mufs, da $| q^{2r+1} | < 1$ ist, als Unstetigkeitspunkt der Funktion $\frac{x^k}{1 - q^{-(2r+1)} x}$ in Betracht zu ziehen sein. Das Residuum der Funktion inbezug auf diesen Punkt wird

$$-q^{(k+1)(2r+1)}. \tag{40}$$

Ist nun weiter

α) $\boldsymbol{k \geq 0}$, so ist der Punkt $x = q^{2r+1}$ der einzige Unstetigkeitspunkt unserer Funktion im Innern und auf der Peripherie des Kreises. Es wird die Summe der Residuen nach (40) gleich $-q^{(k+1)(2r+1)}$, also das Integral gleich $-2\pi i q^{(k+1)(2r+1)}$ und

$$[k \geq 0,\ r > 0] \qquad d_{k,r} = -iq^{\frac{(2r+1)(2k+1)}{2}}. \tag{41a}$$

β) $\boldsymbol{k < 0}$. In diesem Falle ist auch der Punkt $x = 0$ ein Pol der Funktion. Das Residuum inbezug auf ihn wird, wie leicht zu sehen, $q^{(k+1)(2r+1)}$. Also die Summe der Residuen wird hier vermöge (40) gleich Null, desgleichen auch das Integral, desgleichen auch nach (39) $d_{k,r}$.

$$[k < 0,\ r \geq 0] \qquad d_{k,r} = 0. \tag{41b}$$

2) $r < 0$.

In diesem Fall kann der Punkt $r = q^{2r+1}$ nicht als Unstetigkeitspunkt in Betracht kommen, da er aufserhalb des Kreises liegt. Ist daher

$\alpha)$ $k \geqq 0$, so besitzt die Funktion $\frac{x^k}{1 - q^{-(2r+1)} \cdot x}$ in dem zu betrachtenden Bereiche überhaupt keine Unstetigkeiten, und unser Integral wird gleich Null, desgleichen $d_{k,r}$.

(41c) $$[r < 0,\ k \geqq 0] \qquad d_{k,r} = 0.$$

$\beta)$ $k < 0$. Das Residuum inbezug auf den einzigen Unstetigkeitspunkt $x = 0$ der Funktion in dem zu betrachtenden Bereiche wird $q^{(k+1)(2r+1)}$, folglich unser Integral gleich $2\pi i \cdot q^{(k+1)(2r+1)}$, also nach (39)

(41d) $$[r < 0,\ k < 0] \qquad d_{k,r} = iq^{\frac{(2r+1)(2k+1)}{2}}.$$

Hiermit sind aber alle möglichen Fälle erschöpft. Es mögen die Werte der Grössen $d_{k,r}$ nach den Gleichungen (41a) bis (41d) in übersichtlicher Weise zusammengestellt werden:

(42)
$$\begin{cases} \mathbf{1 \cdot} \boldsymbol{k \geqq 0}. \\ \alpha)\ \boldsymbol{r \geqq 0}: d_{k,r} = -iq^{\frac{(2k+1)(2r+1)}{2}}; \quad \beta)\ \boldsymbol{r < 0}: d_{k,r} = 0 \\ \mathbf{2 \cdot} \boldsymbol{k < 0}. \\ \alpha)\ \boldsymbol{r \geqq 0}: d_{k,r} = 0; \quad \beta)\ \boldsymbol{r < 0}: d_{k,r} = iq^{\frac{(2k+1)(2r+1)}{2}}. \end{cases}$$

§ 3.

Fouriersche Reihe der Funktion $\frac{\vartheta_1' \vartheta_0(nv, n\tau)}{2\pi \vartheta_0(v, \tau)}$.

Für die Funktion $\frac{\vartheta_1' \vartheta_0(nv, n\tau)}{2\pi \vartheta_0(v, \tau)}$ kann man, mag n nun gerade oder ungerade sein, die Entwicklung ansetzen:

(43) $$\frac{\vartheta_1' \vartheta_0(nv, n\tau)}{2\pi \vartheta_0(v, \tau)} = \sum_{-\infty}^{+\infty} \sum_{0}^{n-2} F_{k,r}\, q^{(n-1)r^2 + kr}\, e^{2[k+(n-1)r]\pi i v}.$$

Setzt man in dieser Gleichung $v + \tau$ an Stelle von v, was hier erlaubt ist, da wir es mit einer *ganzen* Funktion zu thun haben, so geht Gleichung (43) über in

$$\frac{\vartheta_1 \cdot \vartheta_0(nv, n\tau)}{2\pi \vartheta_0(v, \tau)} \cdot e^{-2\pi i (n-1) v} \cdot q^{-(n-1)} = \sum_{-\infty}^{+\infty} \sum_{0}^{n-2} \Big[F_{k,r} \cdot q^{(n-1)r^2 + 2kr + 2(n-1)r + 2k}$$

$$e^{2[k+(n-1)r]\pi i v} \Big] = q^{-(n-1)} \sum_{-\infty}^{+\infty} \sum_{0}^{n-2} F_{k,r}\, q^{(n-1)r^2 + 2kr}\, e^{2[k+(n-1)(r-1)]\pi i v}.$$

Aus der Gleichsetzung der letzten beiden Summen, oder, wie man auch sagen kann, aus der Gleichung

$$\sum_{-\infty}^{+\infty}{}_r \sum_{0}^{n-2}{}_k F_{k,r} \cdot q^{(n-1)(r+1)^2+2(r+1)k} e^{2[k+(n-1)r]\pi i v}$$

$$= \sum_{-\infty}^{+\infty}{}_r \sum_{0}^{n-2}{}_k F_{k,r+1} \cdot q^{(n-1)(r+1)^2+2(r+1)k} \cdot e^{2[k+(n-1)r]\pi i v}$$

folgt unmittelbar

$$F_{k,r+1} = F_{k,r}.$$

Das heisst die in Formel (43) auftretenden Constanten lassen sich zurückführen auf die Constanten $F_{k,0}$, ein Resultat, welches man auch erhalten hätte, wenn man in den Gleichungen (15) und (16) a der Null gleich angenommen hätte. *Die Anzahl der Constanten $F_{k,0}$ ist gleich $n-1$. Es handelt sich um ihre Bestimmung.* Diese Aufgabe kann auf verschiedene Weise gelöst werden.

Zuerst durch Multiplication der unendlichen Reihen für $\vartheta_0(nv, n\tau)$ und für $\frac{\vartheta_1'}{2\pi\vartheta_0(v,\tau)}$. Es ist bekanntlich

$$\vartheta_0(nv, n\tau) = \sum_{-\infty}^{+\infty}{}_r (-1)^r q^{nr^2} \cdot e^{2r\hbar\pi i v}$$

$$\frac{\vartheta_1'}{2\pi\vartheta_0(v,\tau)} = \sum_{-\infty}^{+\infty}{}_r q^{-r^2} \cdot a_r \cdot e^{2r\pi i v},$$

wobei

$$a_r = a_{-r} = \sum_{0}^{\infty}{}_\lambda (-1)^\lambda q^{\left(r+\lambda+\frac{1}{2}\right)^2} \tag{44}$$

ist. Multipliciert man die beiden Funktionen mit einander und bezeichnet die resultierende Reihe vorläufig mit

$$\sum_{-\infty}^{+\infty}{}_k B_k e^{2k\pi i v},$$

so ergiebt sich leicht:

$$B_k = \sum_{-\infty}^{+\infty}{}_r (-1)^r q^{nr^2-(nr-k)^2} a_{nr-k} = \sum_{-\infty}^{+\infty}{}_r (-1)^r q^{-n(n-1)r^2+2knr-k^2} a_{nr-k}.$$

Aber für $k=0$ bis $k=n-2$, werden die Grössen B_k den entsprechenden $F_{k,0}$ gleichgesetzt werden können. Es wird also auch

$$F_{k,0} = \sum_{-\infty}^{+\infty}{}_r q^{-n(n-1)r^2+2nkr-k^2} \cdot (-1)^r a_{nr-k}. \tag{45}$$

Diese unendliche Reihe für $F_{k,0}$ lässt sich noch etwas umformen:

Man sieht aus der Gleichung (44), dafs folgende Relation stattfinden mufs:

$$a_{nr-k} = \sum_{0}^{k-1} (-1)^{\lambda} q^{\left(nr-k+\lambda+\frac{1}{2}\right)^2} + (-1)^k a_{nr}.$$

Setzt man diesen Ausdruck für a_{nr-k} in (45) ein, so erhält man

$$F_{k,0} = (-1)^k \sum_{-\infty}^{+\infty} (-1)^r q^{-n(n-1)r^2+2nkr-k^2} a_{nr}$$
$$+ \sum_{-\infty}^{+\infty} \sum_{0}^{k-1} (-1)^{r+\lambda} \cdot q^{\left(nr-k+\lambda+\frac{1}{2}\right)^2 - n(n-1)r^2+2knr-k^2}.$$

Die letzte Summe nun ist, wie man sich leicht überzeugt, der Null gleich, so dass man erhält:

$$F_{k,0} = (-1)^k \sum_{-\infty}^{+\infty} (-1)^r q^{-n(n-1)r^2+2nkr-k^2} \cdot a_{nr}.$$

Diese Form der Grössen F aber zeigt, dafs dieselben identisch sind mit den Grössen F, die in den Arbeiten des Herrn Prof. Krause figurieren und eine wichtige Rolle spielen.*) [Nur in der Bezeichnungsweise ist hier und dort ein kleiner Unterschied insofern, als die soeben mit $F_{k,0}$ bezeichnete Grösse bei Anwendung der Bezeichnung des Herrn Prof. Krause $F_{k-1,0} \cdot q^{-(2k-1)} \cdot (-1)^k$ genannt werden müfste.]

Eine *zweite* Methode zur Bestimmung der Gröfsen $F_{k,0}$ ist die folgende:

Aus Gleichung (43) mit Zuziehung des Resultates, dafs $F_{k,r} = F_{k,0}$ ist, ergiebt sich, dafs für die ganze Funktion $\frac{\vartheta_1' \vartheta_0(nv, n\tau)}{\vartheta_0(v, \tau)}$ die Entwicklung gelten wird:

$$(46) \quad \frac{\vartheta_1' \vartheta_0(nv, n\tau)}{2\pi\vartheta_0(v, \tau)} = \sum_{0}^{n-2} F_{k,0} \cdot e^{2k\pi i v} \vartheta_3[(n-1)v + k\tau, (n-1)\tau].$$

Nun hat aber Herr Prof. Krause in den citierten Arbeiten**) eine einfache Methode zur Bestimmung der unbekannten Constanten $F_{k,0}$ gegeben. Hiernach wird $F_{k,0}$ aus der Gleichung bestimmt:

$$(47) \quad (n-1)F_{k,0} \cdot e^{2k\pi i v} \vartheta_3[(n-1)v + k\tau, (n-1)\tau]$$
$$= \sum_{0}^{n-2} e^{-\frac{2\pi i k r}{n-1}} \frac{\vartheta_1' \vartheta_0\left(nv + \frac{r}{n-1}, n\tau\right)}{2\pi\vartheta_0\left(v + \frac{r}{n-1}, \tau\right)}.$$

*) Vgl. „Math. Annalen“ Band 33, pag. 117.

**) „Math. Annalen“ Band 30, pag. 517 ff.

Indem man in dieser Gleichung $v = 0$ und ferner $n - 1 - k$ an Stelle von k setzt, findet man sofort, dafs die Relation besteht:

$$F_{n-1-k,\,0} = q^{n-1-2k} F_{k,\,0}. \tag{48}$$

Aus dieser Relation lässt sich, wenn die eine Hälfte der Gröfsen F bekannt ist, die fehlende andere Hälfte unmittelbar berechnen. Ferner lassen sich hier noch eine Reihe von Bemerkungen machen, die zur Vereinfachung der Formel (47) dienen können: Sei n gerade,

$$n = 2p,$$

so lässt sich die rechte Seite von (47), abgesehen von dem Faktor $\frac{\vartheta_1'}{2\pi}$ folgendermafsen schreiben:

$$\frac{\vartheta_0(2pv,\ 2p\tau)}{\vartheta_0(v,\ \tau)} + \sum_{1}^{p-1} e^{-\frac{2\pi i k r}{2p-1}} \cdot \frac{\vartheta_0\left(2pv + \frac{r}{2p-1},\ 2p\tau\right)}{\vartheta_0\left(v + \frac{r}{2p-1},\ \tau\right)}$$

$$+ \sum_{p}^{2p-2} e^{-\frac{2\pi i k(\varrho - 2p + 1)}{2p-1}} \cdot \frac{\vartheta_0\left(2pv + \frac{\varrho - 2p + 1}{2p-1},\ 2p\tau\right)}{\vartheta_0\left(v + \frac{\varrho - 2p + 1}{2p-1},\ \tau\right)}.$$

Indem man in der letzten Summe $\varrho = 2p - 1 - r$ setzt, wo dann die neue Summe von $r = 1$ bis $r = p - 1$ zu erstrecken ist, und wenn man in dem ganzen letzten Ausdruck v gleich Null werden läfst, erhält man

$$\frac{\vartheta_0(0,\ 2p\tau)}{\vartheta_0} + 2 \sum_{1}^{p-1} \cos\frac{2\pi k r}{2p-1} \cdot \frac{\vartheta_0\left(\frac{r}{2p-1},\ 2p\tau\right)}{\vartheta_0\left(\frac{r}{2p-1},\ \tau\right)}.$$

Eine ähnliche Vereinfachung der rechten Seite von (47) läfst sich auch für den Fall

$$n = 2p + 1$$

erzielen; indessen wollen wir uns gleich einer andern Vereinfachung von (47) zuwenden. Die rechte Seite von (47) kann, wenn sämmtliche Brüche unter einen Nenner gebracht werden, geschrieben werden:

$$\frac{\sum_{0}^{n-2}\left[e^{-\frac{2\pi i k r}{n-1}} \cdot \vartheta_0\left(nv + \frac{r}{n-1},\ n\tau\right) \cdot \left\{\frac{\prod_{0}^{n-2}{}_{\varepsilon}\ \vartheta_0\left(v + \frac{\varepsilon}{n-1},\ \tau\right)}{\vartheta_0\left(v + \frac{r}{n-1},\ \tau\right)}\right\}\right]}{\prod_{0}^{n-2}{}_{\varepsilon}\ \vartheta_0\left(v + \frac{\varepsilon}{n-1},\ \tau\right)}.$$

Aber da bekanntlich

$$(49) \qquad \prod_{0}^{n-2}{}_{\varepsilon} \vartheta_0\left(v + \frac{\varepsilon}{n-1}, \tau\right) = C_{n-1} \cdot \vartheta_0[(n-1)v, (n-1)\tau]$$

ist, wo C_{n-1} eine Constante ist, deren Wert als bekannt vorausgesetzt werden darf, so erhält man für $F_{k,0}$ folgenden Wert:

$$F_{k,0} = \frac{\vartheta_1' \cdot e^{-2k\pi i v} \sum_{0}^{n-2}{}_{r} \left[e^{-\frac{2k\pi i r}{n-1}} \cdot \vartheta_0\left(nv + \frac{r}{n-1}, n\tau\right) \left\{ \frac{\prod_{0}^{n-2}{}_{\varepsilon} \vartheta_0\left(v + \frac{\varepsilon}{n-1}, \tau\right)}{\vartheta_0\left(v + \frac{r}{n-1}, \tau\right)} \right\} \right]}{2\pi(n-1) C_{n-1} \vartheta_3[(n-1)v + k\tau, (n-1)\tau] \cdot \vartheta_0[(n-1)v, (n-1)\tau]}.$$

Damit ist $F_{k,0}$ in Form eines Bruches gefunden, dessen Zähler eine Summe von Thetaprodukten und dessen Nenner ein sehr einfaches Thetaprodukt ist.

Schliefslich sei noch eine *dritte* Methode der Darstellung von $F_{k,0}$ gegeben. Diese Methode nimmt ihren Ausgang von Gleichung (49). Diese Gleichung kann, indem in ihr zugleich $n+1$ an Stelle von n gesetzt wird, geschrieben werden:

$$\frac{\vartheta_0(nv, n\tau)}{\vartheta_0(v, \tau)} = \frac{1}{C_n} \prod_{1}^{n-1}{}_{\varepsilon} \vartheta_0\left(v + \frac{\varepsilon}{n}, \tau\right).$$

Das Produkt auf der rechten Seite kann nach einem von Herrn Prof. Krause aufgestellten Additionstheorem*) in eine Summe verwandelt werden von der Form

$$\sum_{0}^{n-2}{}_{k} F_{k,0}\, e^{2k\pi i v} \cdot \vartheta_3[(n-1)v + k\tau, (n-1)\tau],$$

wo jetzt aber die $F_{k,0}$, abgesehen von dem allen gemeinsamen Faktor $\frac{1}{C_n}$ lediglich Summen von Thetaprodukten sind. Dadurch unterscheidet sich diese Darstellungsweise der Grössen $F_{k,0}$ von der vorigen.

§ 4.

Zweite Form der Fourierschen Reihen für die Funktionen $\frac{\vartheta_\alpha(nu + n\alpha, n\tau)}{\vartheta_\beta(u, \tau)}$.

Mit Hülfe der in den beiden vorhergehenden §§ gefundenen Resultate ist es nun nicht schwer, die Fouriersche Reihe der Funktion

*) Berichte der math.-phys. Classe der K. Sächs. Gesellschaft der Wissenschaften. 1886.

$$\varphi(v,\ a) = \frac{\vartheta_1'\cdot\vartheta_1'(0,\ n\tau)\,\vartheta_1(nv+na,\ n\tau)}{(2\pi)^2\,\vartheta_0(v,\ \tau)\,\vartheta_0(na,\ n\tau)}$$

zu finden. Aus der Gleichung (37) des § 2 folgt, wenn man darin nv, na, $n\tau$ an Stelle von v, a, τ setzt und die Ausdrücke, in welche hierdurch die Coefficienten $d_{k,\,r}$ übergehn, durch $D_{k,\,r}$ bezeichnet:

$$\frac{\vartheta_1'(0,\ n\tau)\cdot\vartheta_1(nv+na,\ n\tau)}{2\pi\vartheta_0(nv,\ n\tau)\,\vartheta_0(na,\ n\tau)} = \sum_{-\infty}^{+\infty}\sum_{-\infty}^{+\infty} D_{\mu,\,r}\cdot e^{(2r+1)n\pi iv+(2\mu+1)n\pi ia}.$$

Folglich wird

$$\varphi(v,\ a) = \frac{\vartheta_1'\,\vartheta_0(nv,\ n\tau)}{2\pi\vartheta_0(v,\ \tau)}\cdot\sum_{-\infty}^{+\infty}\sum_{-\infty}^{+\infty} D_{\mu,\,r}\cdot e^{(2r+1)n\pi iv+(2\mu+1)n\pi ia},$$

als vermöge der Entwicklungen des § 3

$$\varphi(v,\ a) = \left\{\sum_{0}^{n-2}\sum_{-\infty}^{+\infty} F_{k,\,0}\cdot q^{(n-1)\varrho^2+2k\varrho}\cdot e^{2(n-1)\varrho\pi iv+2k\pi iv}\right\}$$

$$\cdot\, e^{n\pi i(v+a)}\left\{\sum_{-\infty}^{+\infty}\sum_{-\infty}^{+\infty} D_{\mu,\,r}\cdot e^{2rn\pi iv+2\mu n\pi ia}\right\}.$$

Multipliciert man die beiden geschweiften Klammern miteinander, so wird in der für $\varphi(v,\ a)\cdot e^{-n\pi i(v+a)}$ resultierenden Reihe das allgemeine Glied

$$\begin{aligned}(50)\quad & F_{k,\,0}\cdot q^{(n-1)\varrho^2+2k\varrho}\cdot D_{\mu,\,r}\cdot e^{2(n-1)\varrho\pi iv+2rn\pi iv+2k\pi iv+2\mu na\pi i}\\ &= F_{k,\,0}\cdot q^{(n-1)\varrho^2+2k\varrho}\cdot D_{\mu,\,r}\cdot e^{2\pi iv[(n-1)\varrho+nr+k]+2\mu na\pi i}.\end{aligned}$$

Andererseits aber kann man, wie man sich leicht überzeugt, *für gerades und ungerades n* ansetzen:

$$(51)\quad \varphi(v,\ a)\cdot e^{-n\pi i(v+a)} = \sum_{-\infty}^{+\infty}\sum_{-\infty}^{+\infty} B_{l,\,\mu}\cdot e^{2\pi iv[(n-1)\mu+l]+2\mu na\pi i}.$$

Man sieht, dafs hier in dem allgemeinen Gliede der Exponent von $e^{2\pi iv}$ gleich $(n-1)\mu+l$ ist, während wir denselben vorhin gleich $(n-1)\varrho+nr+k$ fanden. Es handelt sich darum zu untersuchen, welche Beziehungen zwischen r, ϱ und k bestehen müssen, damit der Ausdruck $(n-1)\varrho+nr+k$ gleich $(n-1)\mu+l$ werde, wo μ und l ein paar beliebige, aber als *fest* vorgelegt zu denkende ganze Zahlen bedeuten. Die zu untersuchende Gleichung kann auch geschrieben werden:

$$(52)\qquad (n-1)(r+\varrho)+r+k = (n-1)\mu+l.$$

Um die ganzen Zahlen r und ϱ zu finden, welche dieser Gleichung Genüge leisten, schlage man folgenden Weg ein:

Es möge angenommen werden, k habe einen ganz bestimmten seiner $n-1$ Werte $0, 1, \ldots n-2$. Dann ist zum Bestehen der Gleichung (52) zunächst notwendig, dafs

$$r + k = (n-1)s + l \tag{53}$$

sei, wo s eine beliebige ganze positive oder negative Zahl bedeutet. Setzt man den aus (53) gefundenen Wert von r in (52) ein, so ergiebt sich für ϱ der Wert:

$$\varrho = \mu - (ns + l - k). \tag{54}$$

Die gefundenen Werte von r und ϱ setze man aus (53) und (54) in (50) ein, so ergiebt sich, dafs in der Entwicklung von $\varphi(v, a) \cdot e^{-n\pi i(v+a)}$ die Potenz $e^{2\pi i v[(n-1)\mu+l]}$ mit einer unendlichen Summe von Gliedern multipliciert ist, deren allgemeines das folgende sein wird:

$$F_{k,0} \cdot q^{(n-1)(\mu-ns-l+k)^2+2(\mu-ns-l+k)k} \cdot D_{\mu,(n-1)s+l-k}.$$

Man wird demnach, wie sofort zu übersehen, den Faktor von $e^{2\pi i v[(n-1)\mu+l]}$, d. h. die Grösse $B_{l,\mu}$ selbst erhalten, indem man über den letzten Ausdruck die Summe nach s von $-\infty$ bis $+\infty$ und nach k von 0 bis $n-2$ nimmt. Es wird also

$$B_{l,\mu} = \sum_{0}^{n-2}{}_k F_{k,0} \sum_{-\infty}^{+\infty}{}_s q^{(n-1)(\mu-ns-l+k)^2+2(\mu-ns-l+k)k} \cdot D_{\mu,(n-1)s+l-k}. \tag{55}$$

Hiermit ist aber die Aufgabe, die Grössen $B_{l,\mu}$ zu berechnen, gelöst, da die Grössen $D_{\mu,(n-1)s+l-k}$ völlig bekannt sind. Dafs übrigens dieses Resultat mit demjenigen des Herrn Prof. Krause genau übereinstimmt, ergiebt sich auf so einfache Weise, dafs hier der Nachweis übergangen werden kann.

Es sollen noch zwei Relationen zwischen den Grössen B abgeleitet werden, die im Folgenden vielfache Anwendung finden werden:

Man findet, dafs

$$\varphi(-v, -a) = -\varphi(v, a)$$

ist. Setzt man jetzt in Gleichung (51) $-v$ und $-a$ an Stelle von v und a, so ergiebt sich mit Hülfe der letzten Gleichung

$$-\varphi(v, a) \cdot e^{n\pi i(v+a)} = \sum_{-\infty}^{+\infty}{}_l \sum_{-\infty}^{+\infty}{}_\mu B_{l,\mu} e^{-2\pi i v[l+(n-1)\mu]-2\pi i\mu n a}.$$

Die Vergleichung dieser Formel mit (51) ergiebt ohne Mühe die Relation

$$B'_{l,\mu} = -B_{-l-1,-\mu-1}. \tag{56}$$

Eine zweite Relation zwischen den Grössen B ergiebt sich aus der Gleichung (55). Wir brauchen diese Relation im Folgenden nur für den Fall $\mu \geq 0$, weswegen wir auch

$$\mu \geqq 0$$

voraussetzen wollen. Es wird nun nach (55)

$$B_{l,\,\mu+r} = \sum_{0}^{n-2}{}_{k} F_{k,\,0} \sum_{-\infty}^{+\infty}{}_{s} q^{(n-1)(\mu+r-ns-l+k)^2+2(\mu+r-ns-l+k)k} \cdot D_{\mu+r,\,(n-1)s+l-k}.$$

Aber aus den Gleichungen (42) folgt für $\mu \geqq 0$ und positives c

$$\begin{aligned} d_{\mu+r,\,c} &= -\,iq^{\frac{(2\mu+2r+1)(2c+1)}{2}} \\ &= d_{\mu,\,c} \cdot q^{r(2c+1)}. \end{aligned}$$

Das giebt für die Grössen D die Recursionsformel:

$$[\mu \geqq 0] \qquad D_{\mu+r,\,c} = q^{nr(2c+1)} \cdot D_{\mu,\,c}.$$

Beachtet man diese Relation, so geht der obige Ausdruck für $B_{l,\,\mu+r}$ über in

$$\begin{aligned} \sum_{0}^{n-2}{}_{k} F_{k,\,0} \sum_{-\infty}^{+\infty}{}_{s} [&q^{(n-1)(\mu-ns-l+k)^2+(n-1)r^2+2(n-1)r(\mu-ns-l+k)} \\ &\times q^{2(\mu-ns-l+k)k+2kr+nr[2(n-1)s+2l-2k+1]} \cdot D_{\mu,\,(n-1)s+l-k}] \\ = {} & q^{(n-1)r^2+nr+2rl+2(n-1)r\mu} \cdot B_{l,\,\mu}. \end{aligned}$$

Folglich erhält man die Relation

(57) $\qquad [\mu \geqq 0] \quad B_{l,\,\mu+r} = q^{(n-1)r^2+nr+2rl+2(n-1)r\mu} \cdot B_{l,\,\mu}.$

Indem man in dieser Gleichung $\mu - r$ an Stelle von r setzt, erhält man das Resultat, dafs sie *auch für negatives r Gültigkeit besitzt, unter der Voraussetzung, dafs* $\mu \geqq r$ *ist.*

Es müssten jetzt eigentlich die entsprechenden Formeln für die fünfzehn andern, der Funktion $\varphi(v,\, a)$ entsprechenden Funktionen aufgestellt werden, was wieder durch Substitution halber Perioden auf sehr einfache Weise geschehen könnte. Da aber im Folgenden gezeigt werden wird, dafs die nach der eben angewandten Methode gefundenen Resultate sich auf die Resultate in § 1 dieses Abschnittes zurückführen lassen, so kann von einer Aufstellung dieser Formeln Abstand genommen werden.

§ 5.

Vergleichung der Resultate des § 1 und des § 4 dieses Abschnittes.

Die Gleichung (19) kann folgendermafsen geschrieben werden:

$$(58) \quad e^{-n\pi iu} \frac{\vartheta_1(nu+na,\, n\tau)}{\vartheta_0(u,\, \tau)} = \sum_{0}^{n-2}{}_{k} \sum_{-\infty}^{+\infty}{}_{r} a^{(10)}_{k+(n-1)r} \cdot e^{2[k+(n-1)r]\pi iu},$$

wobei dann nach den Gleichungen (20) die Constanten $a^{(10)}_{k+(n-1)r}$ *für positives r* der Relation genügen

$$a^{(10)}_{k+(n-1)\,r} = \lambda^{2r} \cdot q^{r^2(n-1)+nr+2kr} \cdot a^{(10)}_k$$
$$-2\pi i \frac{\vartheta_0(na, n\tau)}{\vartheta_1'} \cdot \lambda^{2r} \cdot q^{r^2(n-1)+nr+2kr+k+\frac{n+1}{4}} \sum_1^r{}_\mu \Big[\lambda^{-(2\mu-1)} \cdot q^{-(n-1)\mu^2-(2k+1)\mu}\Big].$$

Diese Formel nun gilt, wie in § 1 dieses Abschnittes ausdrücklich bemerkt, nicht hlofs für die in Gleichung (58) auftretenden Werte von k, sondern für ganz beliebige k. Man darf deswegen in der letzten Gleichung $-k$ an Stelle von k setzen. Thut man dies und multipliciert weiter die Gleichung (58) mit $\frac{\vartheta_1'\vartheta_1'(0,\, n\tau)}{(2\pi)^2\vartheta_0(na,\, n\tau)}$ und nennt die in der Fourierschen Entwicklung dieser neuen Funktion von u auftretenden Coefficienten $c_{(n-1)r-k}$, so besteht die Gleichung

$$(59)\quad e^{-n\pi i u} \cdot \frac{\vartheta_1'\vartheta_1'(0, n\tau)\vartheta_1(nu+na, n\tau)}{(2\pi)^2\vartheta_0(na, n\tau)\vartheta_0(u, \tau)} = \sum_0^{n-2} \sum_{-\infty}^{+\infty} c_{(n-1)r-k} \cdot e^{2[(n-1)r-k]\pi i u},$$

und die Coefficienten $c_{(n-1)r-k}$ erfüllen folgende Relation:

$$(60)\quad \begin{cases} c_{(n-1)r-k} = \lambda^{2r} \cdot q^{r^2(n-1)-2kr+nr} c_{-k} \\ \quad - i \frac{\vartheta_1'(0,\, n\tau)}{2\pi} \cdot \lambda^{2r} \cdot q^{r^2(n-1)-2kr+nr-k+\frac{n+1}{4}} \sum_1^r{}_\mu \Big[\lambda^{-(2\mu-1)} \cdot q^{-\mu^2(n-1)+(2k-1)\mu}\Big]. \end{cases}$$

Aber für dieselbe Funktion, welche auf der linken Seite der Gleichung (59) auftritt, findet man nach der zweiten der oben dargelegten Methoden vermöge der Gleichung (51) folgende trigonometrische Reihe:

$$\sum_{-\infty}^{+\infty}{}_l \sum_{-\infty}^{+\infty}{}_\mu B_{l,\,\mu} \cdot e^{2\pi i u[(n-1)\mu+l]+(2\mu+1)n\pi i a}.$$

Setzt man in diesem Ausdruck $\lambda - (n-1)\mu$ an Stelle von l, so ergiebt sich

$$\sum_{-\infty}^{+\infty}{}_l \sum_{-\infty}^{+\infty}{}_\mu B_{\lambda-(n-1)\mu,\,\mu} \cdot e^{2\pi i \lambda u+(2\mu+1)n\pi i a}.$$

Folglich wird der Faktor von $e^{2\pi i \lambda u}$ in der Fourierschen Reihe — wir müssen ihn durch c_λ bezeichnen — durch folgende unendliche Reihe ausgedrückt werden können:

$$c_\lambda = \sum_{-\infty}^{+\infty}{}_\mu B_{\lambda-(n-1)\mu,\,\mu} \cdot e^{(2\mu+1)na\pi i}$$
$$= \sum_0^\infty{}_\mu B_{\lambda-(n-1)\mu,\,\mu} \cdot e^{(2\mu+1)na\pi i} + \sum_{-1}^{-\infty}{}_\mu B_{\lambda-(n-1)\mu,\,\mu} \cdot e^{(2\mu+1)na\pi i}.$$

Setzt man in der letzteren Summe $-\mu-1$ an Stelle von μ und beachtet, dafs nach Gleichung (56)

$$B_{\lambda+(n-1)(\mu+1),\,-\mu-1} = -B_{-\lambda-n-(n-1)\mu,\,\mu}$$

ist, so ergiebt sich für c_λ folgender Ausdruck:

$$c_\lambda = \sum_0^\infty{}^{\mu} B_{\lambda-(n-1)\mu,\,\mu}\cdot e^{(2\mu+1)n\pi ia} - \sum_0^\infty{}^{\mu} B_{-\lambda-n-(n-1)\mu,\,\mu}\cdot e^{-(2\mu+1)n\pi ia}.$$

In dieser Gleichung soll

$$\lambda = (n-1)r - k$$

gesetzt werden, wo k einen der $n-1$ Werte $0, 1, \ldots n-2$ annehmen darf, so wird

$$(61)\qquad \begin{aligned} c_{(n-1)r-k} = &\sum_0^\infty{}^{\mu} B_{-k+(n-1)(r-\mu),\,\mu}\cdot e^{(2\mu+1)n\pi ia} \\ &- \sum_0^\infty{}^{\mu} B_{k-n-(n-1)(r+\mu),\,\mu}\, e^{-(2\mu+1)n\pi ia}. \end{aligned}$$

Es möge jetzt zunächst

r positiv

angenommen werden und zugleich wieder von der Abkürzung $e^{n\pi i} = \lambda$ Gebrauch gemacht werden. Dann läfst sich die *erste* der Summen auf der rechten Seite von (61), wenn in ihr zugleich $\mu + r$ an Stelle von μ gesetzt wird, schreiben

$$\begin{aligned} \sum_{-r}^{+\infty}{}^{\mu} B_{-k-(n-1)\mu,\,\mu+r}\cdot\lambda^{2\mu+2r+1} &= \lambda^{2r}\sum_0^\infty{}^{\mu} B_{-k-(n-1)\mu,\,\mu+r}\cdot\lambda^{2\mu+1} \\ &\quad + \lambda^{2r}\sum_{-1}^{-r}{}^{\mu} B_{-k-(n-1)\mu,\,\mu+r}\cdot\lambda^{2\mu+1}. \end{aligned}$$

Setzt man in der letzteren Summe $-\mu-1$ an Stelle von μ, so ergiebt sich, dass die erste der in (61) auftretenden Summen geschrieben werden kann

$$(62)\quad \lambda^{2r}\sum_0^\infty{}^{\mu} B_{-k-(n-1)\mu,\,\mu+r}\cdot\lambda^{2\mu+1} + \lambda^{2r}\sum_0^{r-1}{}^{\mu} B_{-k+(n-1)(\mu+1),\,r-\mu-1}\cdot\lambda^{-(2\mu+1)}.$$

Aber nach Gleichung (57) ist für $\mu \geqq 0$

$$\begin{aligned} B_{-k-(n-1)\mu,\,\mu+r} &= q^{(n-1)r^2+nr-2r[k+(n-1)\mu]+2(n-1)r\mu}\, B_{-k-(n-1)\mu,\,\mu}, \\ &= q^{(n-1)r^2+nr-2kr}\cdot B_{-k-(n-1)\mu,\,\mu}, \end{aligned}$$

sodafs der Ausdruck (62) geschrieben werden kann:

$$(63)\qquad \lambda^{2r} q^{(n-1)r^2+nr-2kr} \sum_0^\infty{}_\mu B_{-k-(n-1)\mu,\,\mu} \cdot \lambda^{2\mu+1} + \lambda^{2r} \sum_0^{r-1}{}_\mu B_{-k+(n-1)(\mu+1),\,r-\mu-1}\, \lambda^{-(2\mu+1)}.$$

Die *zweite* Summe in (61) kann, wenn darin $\mu - r$ an Stelle von μ gesetzt wird, geschrieben werden:

$$(64)\qquad -\lambda^{2r} \sum_r^\infty{}_\mu B_{k-n-(n-1)\mu,\,\mu-r} \cdot \lambda^{-(2\mu+1)}.$$

Indem man auf $B_{k-(n-1)\mu,\,\mu-r}$ die Formel (57) anwendet, erhält man:

$$B_{k-n-(n-1)\mu,\,\mu-r} = q^{(n-1)r^2-nr+2r[n-k+(n-1)\mu]-2(n-1)r\mu} B_{k-n-(n-1)\mu,\,\mu},$$

sodafs der Ausdruck (64) geschrieben werden kann

$$-\lambda^{2r} \cdot q^{(n-1)r^2+nr-2kr} \sum_0^\infty{}_\mu B_{k-n-(n-1)\mu,\,\mu}\, \lambda^{-(2\mu+1)} + \lambda^{2r} \cdot q^{(n-1)r^2+nr-2kr} \sum_0^{r-1}{}_\mu B_{k-n-(n-1)\mu,\,\mu}\, \lambda^{-(2\mu+1)}.$$

Addiert man hierzu den Ausdruck (63), so ergiebt sich wieder $c_{(n-1)r-k}$. Man findet ohne Weiteres durch die Addition, dafs folgende Relation bestehen mufs:

$$c_{(n-1)r-k} = \lambda^{2r} \cdot q^{(n-1)r^2+nr-2kr} c_{-k}$$

$$(65)\qquad + \lambda^{2r} \sum_0^{r-1}{}_\mu \Big\{ B_{-k+(n-1)(\mu+1),\,r-\mu-1} + q^{(n-1)r^2+nr-2kr} B_{k-n-(n-1)\mu,\,\mu} \Big\} \lambda^{-(2\mu+1)}.$$

Die letztere Summe soll näher betrachtet werden.

Nach Gleichung (55) wird

$$B_{-k+(n-1)(\mu+1),\,r-\mu-1} = \sum_0^{n-2}{}_\varrho F_{\varrho,0} \sum_{-\infty}^{+\infty}{}_s \Big[q^{(n-1)[r-\mu-1-ns+k-(n-1)(\mu+1)+\varrho]^2+2[r-\mu-1-ns+k-(n-1)(\mu+1)+\varrho]\varrho} \cdot D_{r-\mu-1,\,(n-1)s-k+(n-1)(\mu+1)-\varrho} \Big],$$

oder, wenn man

$$s = \sigma - \mu - 1$$

setzt:

$$(66)\quad B_{-k+(n-1)(\mu+1),\,r-\mu-1} = \sum_0^{n-2}{}_\varrho F_{\varrho,0} \sum_{-\infty}^{+\infty}{}_\sigma \Big[q^{(n-1)(r-n\sigma+k+\varrho)^2+2(r-n\sigma+k+\varrho)\varrho} \cdot D_{r-\mu-1,\,(n-1)\sigma-k-\varrho} \Big].$$

aus dieser Summe möge das Glied, welches $\varrho = 0$ entspricht, ausgeschieden gedacht werden, und in der übrig bleibenden Summe $\sum_{1}^{n-2}{}_{\varrho}$ möge $n - 1 - \varrho$ an Stelle von ϱ gesetzt werden. Die neue Summe nach ϱ wird dann gleichfalls von 1 bis $n - 2$ zu erstrecken sein, und man findet, dass die Gleichung (66) geschrieben werden kann

$$B_{-k+(n-1)(\mu+1),\, r-\mu-1} = F_{0,\,0} \sum_{-\infty}^{+\infty}{}_{\sigma}\, q^{(n-1)(r-n\sigma+k)^2} \cdot D_{r-\mu-1,\,(n-1)\sigma-k}$$
$$+ \sum_{1}^{n-2}{}_{\varrho} F_{n-1-\varrho,\,0} \sum_{-\infty}^{+\infty}{}_{\sigma} \Big[q^{(n-1)(r-n\sigma+k+n-1-\varrho)^2+2(r-n\sigma+k+n-1-\varrho)(n-1-\varrho)}$$
$$\cdot D_{r-\mu-1,\,(n-1)\sigma-k+\varrho-n+1} \Big],$$

oder indem man $\sigma + 1$ an Stelle von σ setzt und sich zugleich der Relation (48) bedient, nach der

$$F_{n-1-\varrho,\,0} = q^{n-1-2\varrho} \cdot F_{\varrho,\,0}$$

ist:

$$(67) \quad B_{-k+(n-1)(\mu+1),\, r-\mu-1} = F_{0,0} \sum_{-\infty}^{+\infty}{}_{\sigma}\, q^{(n-1)(r-n\sigma+k)^2} \cdot D_{r-\mu-1,\,(n-1)\sigma-k}$$
$$+ \sum_{1}^{n-2}{}_{\varrho} F_{\varrho,\,0} \sum_{-\infty}^{+\infty}{}_{\sigma} \Big[q^{(n-1)(r-n\sigma+k-\varrho-1)^2+2(r-n\sigma+k-\varrho-1)(n-1-\varrho)+n-1-2\varrho}$$
$$\cdot D_{r-\mu-1,\,(n-1)\sigma-k+\varrho} \Big].$$

Man überzeugt sich aber leicht, dass der Exponent von q in der letzten Summe nach σ auch auf die Form gebracht werden kann:

$$(n-1)(r-n\sigma+k-\varrho)^2 - 2\varrho(r-n\sigma+k-\varrho).$$

Demzufolge wird die Gleichung (67) auch geschrieben werden können:

$$(68) \quad B_{-k+(n-1)(\mu+1),\, r-\mu-1}$$
$$= \sum_{0}^{n-2}{}_{\varrho} F_{\varrho,\,0} \sum_{-\infty}^{+\infty}{}_{\sigma}\, q^{(n-1)(r-n\sigma+k-\varrho)^2-2\varrho(r-n\sigma+k-\varrho)} \cdot D_{r-\mu-1,\,(n-1)\sigma-k+\varrho}.$$

Nun ist nach den Gleichungen (42) $D_{r-\mu-1,\,(n-1)\sigma-k+\varrho}$, wenn der Index $r - \mu - 1 \geqq 0$ ist, nur so lange von Null verschieden, als auch der zweite Index $(n-1)\sigma - k + \varrho \geqq 0$ ist. Hier sind 2 Fälle zu unterscheiden:

α) Ist $\varrho < k$, so mufs σ *mindestens* gleich 1 sein, damit

$$(n-1)\sigma - k + \varrho \geqq 0$$

werde. Da aber k und ϱ beide nur die Werte von 0 bis $n-2$ annehmen können, so wird für $\sigma = 1$ der Ausdruck $(n-1)\sigma - k + \varrho$ thatsächlich schon $\geqq 0$ werden müssen, welches auch die Werte von k

und ϱ sein mögen. — Dafs für $k = 0$ sich die Betrachtung etwas modificiert, ohne dafs jedoch die folgenden Resultate irgendwie alteriert werden, braucht kaum erwähnt zu werden.

β) Ist $\varrho \geqq k$, so wird σ alle Werte von 0 bis $+\infty$ annehmen können, während der Ausdruck $(n-1)\sigma - k + \varrho$ stets $\geqq 0$ bleibt. Demzufolge kann Gleichung (68) geschrieben werden

$$(69)\quad \begin{cases} B_{-k+(n-1)(\mu+1),\, r-\mu-1} \\ = \sum_{0}^{k-1}{}_{\varrho} F_{\varrho,0} \sum_{1}^{\infty}{}_{\sigma} q^{(n-1)(r-n\sigma+k-\varrho)^2 - 2\varrho(r-n\sigma+k-\varrho)} \cdot D_{r-\mu-1,\,(n-1)\sigma-k+\varrho} \\ + \sum_{k}^{n-2}{}_{\varrho} F_{\varrho,0} \sum_{0}^{\infty}{}_{\sigma} q^{(n-1)(r-n\sigma+k-\varrho)^2 - 2\varrho(r-n\sigma+k-\varrho)} \cdot D_{r-\mu-1,(n-1)\sigma-k+\varrho}\,. \end{cases}$$

Setzt man in den letzteren Summen für $D_{r-\mu-1,\,(n-1)\sigma-k+\varrho}$ seinen Wert nach Gleichung (42a) ein, nämlich

$$-i \cdot q^{\frac{n}{2}(2r-2\mu-1)[2(n-1)\sigma-2k+2\varrho+1]},$$

so wird in dem allgemeinen Gliede der Exponent von q gleich

$$(n-1)(r-n\sigma+k-\varrho)^2 - 2\varrho(r-n\sigma+k-\varrho)$$
$$+\frac{n}{2}(2r-2\mu-1)[2(n-1)\sigma-2k+2\varrho+1].$$

Ordnet man diesen Ausdruck nach Potenzen von r, so ergiebt sich, dafs derselbe gleich

$$(n-1)(n\sigma-k+\varrho)^2 + 2\varrho(n\sigma-k+\varrho)$$
$$-\frac{n}{2}(2\mu+1)[2(n-1)\sigma-2k+2\varrho+1]$$
$$-2(n-1)r(n\sigma-k+\varrho) - 2r\varrho + nr[2(n-1)\sigma-2k+2\varrho+1]$$
$$+(n-1)r^2$$
$$= (n-1)(n\sigma-k+\varrho)^2 + 2\varrho(n\sigma-k+\varrho)$$
$$-\frac{n}{2}(2\mu+1)[2(n-1)\sigma-2k+2\varrho+1] + (n-1)r^2 - 2kr + nr$$

ist, sodafs sich die Gleichung (69) schliefslich in folgende Form bringen läfst:

$$B_{-k+(n-1)(\mu+1),\,r-\mu-1} = -iq^{(n-1)r^2-2kr+nr}$$
$$(70)\quad \times\Big\{\sum_{0}^{k-1}{}_{\varrho} F_{\varrho,0} \sum_{1}^{\infty}{}_{\sigma} q^{(n-1)(n\sigma-k+\varrho)^2+2\varrho(n\sigma-k+\varrho)-\frac{n}{2}(2\mu+1)[2(n-1)\sigma-2k+2\varrho+1]}$$
$$+\sum_{k}^{n-2}{}_{\varrho} F_{\varrho,0} \sum_{0}^{\infty}{}_{\sigma} q^{(n-1)(n\sigma-k+\varrho)^2+2r(n\sigma-k+\varrho)-\frac{n}{2}(2\mu+1)[2(n-1)\sigma-2k+2\varrho+1]}\Big\}.$$

Auf dieselbe Weise wird jetzt die Gröfse $B_{k-n-(n-1)\mu,\,\mu}$ zu entwickeln sein. Nach Gleichung (55) wird

$$B_{k-n-(n-1)\mu,\mu}=\sum_{0}^{n-2}{}_{\varrho}F_{\varrho,0}\sum_{-\infty}^{+\infty}{}_{s}\Big[q^{(n-1)(\mu-ns+n-k+(n-1)\mu+\varrho)^2+2(\mu-ns+n-k+(n-1)\mu+\varrho)\varrho}$$
$$\times D_{\mu,\,(n-1)s-n+k-(n-1)\mu-\varrho}\Big].$$

Setzt man hierin

$$s=\sigma+\mu+1,$$

so ergiebt sich

$$(71)\quad B_{k-n-(n-1)\mu,\,\mu}=\sum_{0}^{n-2}{}_{\varrho}F_{\varrho,0}\sum_{-\infty}^{+\infty}{}_{\sigma}q^{(n-1)(n\sigma+k-\varrho)^2-2(n\sigma+k-\varrho)\varrho}\cdot D_{\mu,\,(n-1)\sigma+k-\varrho-1}.$$

Da μ als positiv anzusehen ist, so wird $D_{\mu,\,(n-1)\sigma+k-\varrho-1}$ nur dann von Null verschieden sein können, wenn $(n-1)\sigma+k-\varrho-1\geqq 0$ ist. Folglich wird genau wie vorher die Summe nach ϱ in (71) in zwei Teile zerlegt werden können, und zwar wird Gleichung (71) dadurch übergehn in folgende:

$$B_{k-n-(n-1)\mu,\,\mu}=\sum_{0}^{k-1}{}_{\varrho}F_{\varrho,0}\sum_{0}^{\infty}{}_{\sigma}q^{(n-1)(n\sigma+k-\varrho)^2-2(n\sigma+k-\varrho)\varrho}\cdot D_{\mu,\,(n-1)\sigma+k-\varrho-1}$$
$$+\sum_{k}^{n-2}{}_{\varrho}F_{\varrho,0}\sum_{1}^{\infty}{}_{\sigma}q^{(n-1)(n\sigma+k-\varrho)^2-2(n\sigma+k-\varrho)\varrho}\cdot D_{\mu,\,(n-1)\sigma+k-\varrho-1}.$$

Setzt man hierin für $D_{\mu,\,(n-1)\sigma+k-\varrho-1}$ seinen Wert ein und in der so entstehenden Gleichung $-\sigma$ an Stelle von σ, so erhält man

$$(72)\quad \begin{aligned} &B_{k-n-(n-1)\mu,\,\mu}\\ &=-i\sum_{0}^{k-1}{}_{\varrho}F_{\varrho,0}\sum_{0}^{-\infty}{}_{\sigma}q^{(n-1)(n\sigma-k+\varrho)^2+2(n\sigma-k+\varrho)\varrho-\frac{n}{2}(2\mu+1)[2(n-1)\sigma-2k+2\varrho+1]}\\ &\quad -i\sum_{k}^{n-2}{}_{\varrho}F_{\varrho,0}\sum_{-1}^{-\infty}{}_{\sigma}q^{(n-1)(n\sigma-k+\varrho)^2+2(n\sigma-k+\varrho)\varrho-\frac{n}{2}(2\mu+1)[2(n-1)\sigma-2k+2\varrho+1]}. \end{aligned}$$

Multipliciert man diese Gleichung mit $q^{(n-1)r^2-2kr+nr}$ und addiert sie dann zu (70), so erhält man, wie leicht zu sehen, das Resultat:

$$B_{-k+(n-1)(\mu+1),\,r-\mu-1}+q^{(n-1)r^2-2kr+nr}B_{k-n-(n-1)\mu,\,\mu}$$
$$=-iq^{(n-1)r^2-2kr+nr}$$
$$\times\left\{\sum_{0}^{n-2}{}_{\varrho}F_{\varrho,0}\sum_{-\infty}^{+\infty}{}_{\sigma}q^{(n-1)(n\sigma-k+\varrho)^2+2\varrho(n\sigma-k+\varrho)-\frac{n}{2}(2\mu+1)[2(n-1)\sigma-2k+2\varrho+1]}\right\}.$$

Setzt man dieses Resultat in die Gleichung (65) ein, so ergiebt sich die folgende Recursionsformel für $c_{(n-1)r-k}$:

$$(73)\quad \begin{cases} c_{(n-1)r-k} \\ = \lambda^{2r} \cdot q^{(n-1)r^2-2kr+nr} c_{-k} - i\lambda^{2r} \cdot q^{(n-1)r^2-2kr+nr} \\ \times \sum_{0}^{r-1}{}_{\mu} \Big[\sum_{0}^{n-2}{}_{\varrho} F_{\varrho,0} \sum_{-\infty}^{+\infty}{}_{\sigma} \cdot q^{(n-1)(n\sigma-k+\varrho)^2+2\varrho(n\sigma-k+\varrho)-\frac{n}{2}(2\mu+1)[2(n-1)\sigma-2k+2r+1]} \\ \cdot \lambda^{-(2\mu+1)} \Big]. \end{cases}$$

Diese Formel gilt aber nur für ein positives r. Ist

r negativ,

so könnte man durch eine der obigen ganz analoge Betrachtung zeigen, dafs der Coefficient $c_{-(n-1)r-k}$ mit c_{-k} durch eine der Gleichung (73) ganz ähnliche Relation verbunden ist. Kürzer kann man auf folgendem Wege zur Bestimmung der Coefficienten $c_{-(n-1)r-k}$ gelangen: Aus Gleichung (61) folgt ohne Weiteres

$$(74)\quad c_{-(n-1)r-k} = -c_{k-n+(n-1)r}(-a) = -c_{(n-1)r-(n-k)}(-a)$$

Aus dieser Gleichung folgt, dafs die Bestimmung der Gröfsen $c_{-(n-1)r-k}$ auf die Bestimmung der $c_{(n-1)r-(n-k)}$ reduciert werden kann. *Man sieht jedenfalls, dafs die Bestimmung der sämmtlichen Coefficienten c auf die Bestimmung der n — 1 Gröfsen c_{-k} reduciert werden kann.*

Anmerkung: Jetzt sieht man auch den Grund, warum die Bestimmung der Coefficienten c auf die Bestimmung der Gröfsen c_{-k} und *nicht*, wie man entsprechend den Formeln des § 1 dieses Abschnittes erwarten könnte, der Gröfsen c_{+k} reduciert worden ist. Setzt man nämlich in (74) $-k$ an Stelle von k, wodurch man erhält

$$c_{-(n-1)r+k} = -c_{-k-n+(n-1)r}(-a),$$

so sieht man leicht, dafs für $r = 1$ mittelst dieser Formel die Reduktion einer der Gröfsen $c_{-(n-1)+k}$ auf eine der Gröfsen c_{+k_1} nicht bewerkstelligt werden kann.

Es wird sich jetzt darum handeln, die Formel (73) mit der Formel (60) zu vergleichen. Dazu soll die Formel (73) noch etwas transformiert werden: Man überzeugt sich leicht, dafs darin der Exponent von q in der Summe nach σ auf die Form gebracht werden kann

$$\begin{aligned} &(n-1)\left(n\sigma-k+\varrho-\mu-\tfrac{1}{2}\right)^2+\varrho(2n\sigma-2k+2\varrho-2\mu-1) \\ &+(2\mu+1)(n-1)(n\sigma-k+\varrho)-(n-1)\left(\mu+\tfrac{1}{2}\right)^2+\varrho(2\mu+1) \\ &-\tfrac{n}{2}(2\mu+1)[2(n-1)\sigma-2k+2\varrho+1] \\ &=(n-1)\left(n\sigma-k+\varrho-\mu-\tfrac{1}{2}\right)^2+\varrho(2n\sigma-2k+2\varrho-2\mu-1) \\ &+k+2k\mu-(n-1)(\mu+1)^2-\mu+\tfrac{n-3}{4}. \end{aligned}$$

Setzt man in der so transformierten Gleichung (73) $\mu - 1$ an Stelle von μ, wo dann die neue Summe nach μ von 1 bis r zu erstrecken ist, so ergiebt sich:

$$c_{(n-1)r-k}$$

$$= \lambda^{2r} \cdot q^{(n-1)r^2-2kr+nr} \cdot c_{-k} - iq^{(n-1)r^2-2kr+nr-k+\frac{n+1}{4}}$$

$$\times \sum_{1}^{r\mu} \Big[\sum_{0}^{n-1\varrho} F_{\varrho,0} \sum_{-\infty}^{+\infty\sigma} \cdot q^{(n-1)\left(n\sigma-k+\varrho-\mu+\frac{1}{2}\right)^2+\varrho(2n\sigma-2k+2\varrho-2\mu+1)} \cdot q^{-(n-1)\mu^2+(2k-1)\mu}$$

$$\cdot \lambda^{-(2\mu-1)} \Big].$$

Hält man diese Gleichung zusammen mit Gleichung (60), so ergiebt sich das Resultat, dafs die beiden Gleichungen vollkommen identisch wären, wenn sich nachweisen liefse, dafs

$$(75) \quad \sum_{0}^{n-2\varrho} F_{\varrho,0} \sum_{-\infty}^{+\infty\sigma} q^{(n-1)\left(n\sigma-k+\varrho-\mu+\frac{1}{2}\right)^2+\varrho(2n\sigma-2k+2\varrho-2\mu+1)} = \frac{\vartheta_1'(0, n\tau)}{2\pi}$$

wäre, *dafs also die linke Seite der letzten Gleichung einen von k und μ ganz unabhängigen Wert besitzt.* Es ist nun nicht schwer, die Richtigkeit der Gleichung (75) nachzuweisen.

In der That: Aus Gleichung (46) folgt, indem man darin $v = \frac{\tau}{2} - \frac{r}{n}$ setzt, wo r einen beliebigen der Werte 1, 2, ... bis $n - 1$ annehmen kann:

$$0 = \sum_{0}^{n-2\varrho} F_{\varrho,0} \cdot e^{-\frac{2\varrho r\pi i}{n}} \cdot q^{\varrho} \cdot \vartheta_3\Big[(n-1)\frac{\tau}{2} - \frac{(n-1)r}{n} + \varrho\tau, (n-1)\tau\Big]$$

oder auch

$$(76) \qquad 0 = \sum_{0}^{n-2\varrho} F_{\varrho,0} \cdot e^{-\frac{(2\varrho+1)r\pi i}{n}} \cdot \vartheta_2\Big(\varrho\tau + \frac{r}{n}, (n-1)\tau\Big).$$

Setzt man dagegen in derselben Gleichung (46) $v = \frac{\tau}{2}$, so ergiebt sich, wie man unschwer findet:

$$n \cdot q^{-\frac{n-1}{4}} \frac{\vartheta_1'(0, n\tau)}{2\pi} = \sum_{0}^{n-2\varrho} F_{\varrho,0} \cdot q^{\varrho} \cdot \vartheta_3\Big[(n-1)\frac{\tau}{2} + \varrho\tau, (n-1)\tau\Big]$$

oder

$$(77) \qquad n \frac{\vartheta_1'(0, n\tau)}{2\pi} = \sum_{0}^{n-2\varrho} F_{\varrho,0}\, \vartheta_2\Big(\varrho\tau, (n-1)\tau\Big).$$

Jetzt möge die Gleichung (76) mit $e^{\frac{2(k+\mu)r\pi i}{n}}$ multipliciert werden und in der so entstehenden Gleichung r seine sämmtlichen Werte von 1

bis $n-1$ annehmen. Die Gleichungen dieses Systems sollen addiert und zur Summe dann noch Gleichung (77) hinzugefügt werden, so ergiebt sich

$$(78)\quad n\frac{\vartheta_1'(0,n\tau)}{2\pi}=\sum_0^{n-1}\sum_0^{n-2}F_{\varrho,0}\cdot e^{\frac{-(2\varrho-2k-2\mu+1)r\pi\iota}{n}}\cdot\vartheta_2\Big(\varrho\tau+\frac{r}{n},(n-1)\tau\Big).$$

Es wird der Faktor von $F_{\varrho,0}$ in dieser Gleichung

$$\sum_0^{n-1}\cdot e^{-\frac{r\pi\iota}{n}(2\varrho-2k-2\mu+1)}\cdot\vartheta_2\Big(\varrho\tau+\frac{r}{n},(n-1)\tau\Big)$$

oder, wenn man für $\vartheta_2\Big(\varrho\tau+\frac{r}{n},(n-1)\tau\Big)$ seine unendliche Reihe einsetzt,

$$(79)\quad \sum_0^{n-1}e^{-\frac{r\pi\iota}{n}(2\varrho-2k-2\mu+1)}\sum_{-\infty}^{+\infty}q^{(n-1)\left(s+\frac{1}{2}\right)^2+\varrho(2s+1)}\cdot e^{\frac{\pi ir}{n}(2s+1)}.$$

Führt man zuerst die Summation nach r aus, was erlaubt ist, da wir es mit unbedingt konvergenten Reihen zu thun haben, so ergiebt sich

$$\sum_0^{n-1}e^{-\frac{r\pi\iota}{n}(2\varrho-2k-2\mu-2s)}=\frac{1-e^{2\pi\iota(s+k-\varrho+\mu)}}{1-e^{\frac{2\pi\iota}{n}(s+k-\varrho+\mu)}}.$$

Der letzte Ausdruck wird im Allgemeinen der Null gleich sein; nur wenn s die Form hat $n\sigma-k+\varrho-\mu$, wo σ eine beliebige ganze Zahl bedeutet, wird er gleich n. Infolge dessen wird der Ausdruck (79) auch geschrieben werden können

$$n\sum_{-\infty}^{+\infty}{}^{\sigma}q^{(n-1)\left(n\sigma-k+\varrho-\mu+\frac{1}{2}\right)^2+\varrho(2n\sigma-2k+2\varrho-2\mu+1)}.$$

und die Gleichung (78) wird in die Gleichung (75) übergehen.

Hiermit ist nun gezeigt, daſs die Coefficienten, die sich nach der Methode des § 4 ergeben, genau denselben Recursionsformeln genügen, wie die früher gefundenen, und daſs sich aus der Vergleichung der beiderseitigen Resultate wenigstens auf diesem Wege keine neuen Relationen ergeben.

Wenn es aber demzufolge auch gleichgiltig ist, welche Methode zur Bestimmung der Coefficienten c benutzt ist, so muſs doch bemerkt werden, daſs in einer Hinsicht der Methode des § 4 der Vorzug zu geben ist, insofern dieselbe nämlich auch sofort die Bestimmung der Constanten c_{-k} gestattet. Man braucht dazu in Gleichung (61) nur $r=0$ zu setzen, so erhält man

$$(80)\qquad c_{-k} = \sum_{0}^{\infty}{}_{\mu} B_{-k-(n-1)\mu,\,\mu} \cdot e^{(2\mu+1)na\pi i} - \sum_{0}^{\infty}{}_{\mu} B_{k-n-(n-1)\mu,\,\mu}\, e^{-(2\mu+1)na\pi i}.$$

Um aus dieser Gleichung brauchbare Formeln für c_{-k} zu erhalten, kann man auf sehr verschiedene Weise vorgehen. Wir wollen folgenden Weg einschlagen:

Es wird nach Gleichung (55)

$$B_{-k-(n-1)\mu,\,\mu} = \sum_{0}^{n-2}{}_{\varrho} F_{\varrho,0} \sum_{+\infty}^{+\infty}{}_{s} \Big[q^{(n-1)[\mu-ns+k+(n-1)\mu+\varrho]^2+2\varrho[\mu-ns+k+(n-1)\mu+\varrho]} \cdot D_{\mu,\,(n-1)s-k-(n-1)\mu-\varrho} \Big],$$

oder wenn man $s = \sigma + \mu$ setzt

$$B_{-k-(n-1)\mu,\,\mu} = \sum_{0}^{n-2}{}_{\varrho} F_{\varrho,0} \sum_{-\infty}^{+\infty}{}_{\sigma} q^{(n-1)(n\sigma-k-\varrho)^2-2\varrho(n\sigma-k-\varrho)} \cdot D_{\mu,(n-1)\sigma-k-\varrho}.$$

Indem man das $\varrho = 0$ entsprechende Glied abtrennt, in der übrig bleibenden Summe nach ϱ an Stelle von $\varrho : n - 1 - \varrho$ setzt, indem man ferner die Formel beachtet

$$F_{n-1-\varrho,0} = q^{n-1-2\varrho} F_{\varrho,0},$$

so erhält man genau auf dieselbe Art wie schon einmal oben in diesem §

$$B_{-k-(n-1)\mu,\,\mu} = \sum_{0}^{n-2}{}_{\varrho} F_{\varrho,0} \sum_{-\infty}^{+\infty}{}_{\sigma} q^{(n-1)(n\sigma-k+\varrho)^2+2\varrho(n\sigma-k+\varrho)} \cdot D_{\mu,(n-1)\sigma-k+\varrho}.$$

Genau wie oben kann jetzt wieder die Summe nach ϱ zerlegt werden in $\sum_{0}^{k-1}{}_{\varrho} + \sum_{k}^{n-2}{}_{\varrho}$, und es ergiebt sich schliefslich für $B_{-k-(n-1)\mu,\,\mu}$ die Formel:

$$(81)\quad \begin{cases} B_{-k-(n-1)\mu,\,\mu} \\ = -i \sum_{0}^{k-1}{}_{\varrho} F_{\varrho,0} \sum_{1}^{\infty}{}_{\sigma} q^{(n-1)(n\sigma-k+\varrho)^2+2\varrho(n\sigma-k+\varrho)+\frac{n}{2}(2\mu+1)[2(n-1)\sigma-2k+2\varrho+1]} \\ \quad -i \sum_{k}^{n-2}{}_{\varrho} F_{\varrho,0} \sum_{0}^{\infty}{}_{\sigma} q^{(n-1)(n\sigma-k+\varrho)^2+2\varrho(n\sigma-k+\varrho)+\frac{n}{2}(2\mu+1)[2(n-1)\sigma-2k+2\varrho+1]}. \end{cases}$$

Beachtet man ferner die Gleichung (72), welche den Wert der Gröfse $B_{k-n-(n-1)\mu,\,\mu}$ kennen lehrt, so findet man, dafs die Gleichung (80) in folgender Form geschrieben werden kann:

$$
(82)\quad
\begin{cases}
c_{-k} = -i\sum_{0}^{\infty}{}^{\mu}\sum_{0}^{k-1}{}^{\varrho} F_{\varrho,0}\sum_{1}^{\infty}{}^{\sigma}\Big[q^{(n-1)(n\sigma-k+\varrho)^2+2\varrho(n\sigma-k+\varrho)+\frac{n}{2}(2\mu+1)[2(n-1)\sigma-2k+2\varrho+1]} \\
\qquad\qquad \cdot e^{(2\mu+1)n\alpha\pi i}\Big] \\
\quad -i\sum_{0}^{\infty}{}^{\mu}\sum_{k}^{n-2}{}^{\varrho} F_{\varrho,0}\sum_{0}^{\infty}{}^{\sigma}\Big[q^{(n-1)(n\sigma-k+\varrho)^2+2\varrho(n\sigma-k+\varrho)+\frac{n}{2}(2\mu+1)[2(n-1)\sigma-2k+2\varrho+1]} \\
\qquad\qquad \cdot e^{(2\mu+1)n\alpha\pi i}\Big] \\
\quad +i\sum_{0}^{\infty}{}^{\mu}\sum_{0}^{k-1}{}^{\varrho} F_{\varrho,0}\sum_{0}^{\infty}{}^{\sigma}\Big[q^{(n-1)(-n\sigma-k+\varrho)^2+2\varrho(-n\sigma-k+\varrho)+\frac{n}{2}(2\mu+1)[2(n-1)\sigma+2k-2\varrho-1]} \\
\qquad\qquad \cdot e^{-(2\mu+1)n\alpha\pi i}\Big] \\
\quad +i\sum_{0}^{\infty}{}^{\mu}\sum_{k}^{n-2}{}^{\varrho} F_{\varrho,0}\sum_{1}^{\infty}{}^{\sigma}\Big[q^{(n-1)(-n\sigma-k+\varrho)^2+2\varrho(-n\sigma-k+\varrho)+\frac{n}{2}(2\mu+1)[2(n-1)\sigma+2k-2\varrho-1]} \\
\qquad\qquad \cdot e^{-(2\mu+1)n\alpha\pi i}\Big].
\end{cases}
$$

In diesen Summen darf jetzt die Reihenfolge der Summationen nach μ und nach σ vertauscht werden, da wir es mit unbedingt convergenten Reihen zu thun haben, wovon man sich leicht überzeugt. Ferner ist aber leicht zu zeigen, dafs die Summationen nach μ ausgeführt werden können. Ist nämlich

$$a = \alpha + i\beta,$$

so wird, wenn β *positiv* ist, $|\, e^{n\pi i a}\,| < 1$ sein müssen, sodafs wenigstens in den beiden ersten der Summen in (82) die Summation nach μ wirklich ausgeführt werden darf. Da aber die ganze Entwicklung, in der die Gröfse c_{-k} als Coefficient auftritt, nur für solche Werte von a gilt, welches zwischen zwei, durch die Punkte $+\frac{\tau}{2}$ und $-\frac{\tau}{2}$ zur reellen Axe der a-Ebene gezogenen Parallelen liegen, so wird auch in den beiden *letzten* Summen in (82) $|\, q^{[2(n-1)\sigma+2k-2\varrho-1]}\cdot e^{-2a\pi i}\,| < 1$ sein müssen. Denn in der ersten dieser beiden Summen kann zwar σ den Wert 0 annehmen, aber $2k-2\varrho-1$ wird immer positiv bleiben, sodafs *auch für* $\sigma = 0$ der Ausdruck $2(n-1)\sigma + 2k - 2\varrho - 1$ stets einen positiven ungeradzahligen Wert annimmt, also erst recht für $\sigma > 0$. Ganz das Analoge findet für die letzte Summe in (82) statt. Jedenfalls ergiebt sich, dafs die Summation nach μ in sämmtlichen Summen in (82) wirklich ausgeführt werden kann. — Sollte der mit i multiplicierte Teil von a, den wir mit β bezeichnet haben, *negativ* sein, so beweist man genau wie in dem eben behandelten Falle die Zulässigkeit der Summation nach μ. — Wenn man nun die Summationen nach μ wirklich ausführt, so findet man sofort für c_{-k} folgende bewerkenswerte Formel

$$(83)\qquad c_{-k} = \frac{1}{2}\sum_{0}^{n-2}{}_{\varrho}\, F_{\varrho,0} \sum_{-\infty}^{+\infty}{}_{\sigma} \frac{q^{(n-1)(n\sigma-k+\varrho)^2+2\varrho(n\sigma-k+\varrho)}}{\sin n\pi\left\{a+\tau\left[(n-1)\sigma-k+\varrho+\frac{1}{2}\right]\right\}}.$$

Schliefslich möge noch erwähnt werden, dafs die Gleichung (74) für $r = 0$ liefert

$$(84)\qquad c_{-k} = -\,c_{k-n}(-a),$$

dafs es also genügt, die eine Hälfte der Constanten c_{-k} nach Formel (83) zu berechnen, und dafs die andere Hälfte dann aus (84) ohne Weiteres entnommen werden kann.

Hiermit ist die Aufgabe dieses Paragraphen völlig zu Ende geführt, wenigstens für die Funktion $\frac{\vartheta_1(nu+na,\ n\tau)}{\vartheta_0(u,\ \tau)}$. Da aber die fünfzehn entsprechenden Funktionen aus der eben betrachteten durch Substitution halber Perioden abgeleitet werden können, so folgt, *dafs allgemein die für die Funktionen* $\frac{\vartheta_\alpha(nu+na,\ n\tau)}{\vartheta_\beta(u,\ \tau)}$ *erhaltenen verschiedenen Fourierschen Reihen auf einander zurückgeführt werden können.*

Dritter Abschnitt.

Behandlung der Specialfälle $n = 2$ und $n = 3$.

§ 1.

Der Fall $n = 2$.

In diesem § sollen die Formeln, welche in § 1 des vorigen Abschnittes gefunden wurden, für den Wert $n = 2$ aufgestellt und die Resultate mit den Resultaten anderer Mathematiker, namentlich Biehlers in seiner oben citierten thèse de doctorat verglichen werden.

Aus Gleichung (15) des erwähnten § ergiebt sich für $n = 2$

$$\frac{\vartheta_0(2\mu+2a,\ 2\tau)}{\vartheta_0(\mu,\ \tau)} = \sum_{-\infty}^{+\infty}{}_{r}\, a_r^{(00)}\, e^{2r\pi i u},$$

wobei die Coefficienten $a_r^{(00)}$ den Gleichungen (16a) und (16b), d. h. in unserm speciellen Falle den Relationen genügen:

$$(85)\qquad \begin{cases} a_r^{(00)} = \lambda^{2r}.q^{r^2}.a_0^{(00)} - 2\pi i\,\frac{\vartheta_1(2a,\ 2\tau)}{\vartheta_1'}\cdot\lambda^{2r}\cdot q^{r^2}\sum_{0}^{r-1}{}_{\mu}\,\lambda^{-(2\mu+1)}.q^{-\left(\mu+\frac{1}{2}\right)^2} \\ a_{-r}^{(00)} = \lambda^{-2r}.q^{r^2}a_0^{(00)} + 2\pi i\,\frac{\vartheta_1(2a,\ 2\tau)}{\vartheta_1'}\cdot\lambda^{-2r}\cdot q^{r^2}\sum_{0}^{r-1}{}_{\mu}\,\lambda^{2\mu+1}.q^{-\left(\mu+\frac{1}{2}\right)^2}. \end{cases}$$

Die Gleichung (17) in § 1 des vorigen Abschnittes ergiebt

$$\frac{\vartheta_3(2u+2a,2\tau)}{\vartheta_0(u,\tau)} = \sum_{-\infty}^{+\infty}{}_r\, a_r^{(30)} \cdot e^{2r\pi iu}, \tag{86}$$

wo vermöge der Gleichungen (18)

$$\left\{\begin{aligned} a_r^{(30)} &= (-1)^r \lambda^{2r} \cdot q^{r^2} \cdot a_{(0)}^{(30)} - 2\pi(-1)^r \frac{\vartheta_2(2a,2\tau)}{\vartheta_1'} \\ &\quad \cdot \lambda^{2r} q^{r^2} \sum_0^{r-1}{}_\mu (-1)^\mu \lambda^{-(2\mu+1)} q^{-\left(\mu+\frac{1}{2}\right)^2}. \\ a_{-r}^{(30)} &= (-1)^r \lambda^{-2r} q^{r^2} a_{(0)}^{(30)} - 2\pi(-1)^r \frac{\vartheta_2(2a,2\tau)}{\vartheta_1'} \\ &\quad \cdot \lambda^{-2r} \cdot q^{r^2} \sum_0^{r-1}{}_\mu (-1)^\mu \lambda^{(2\mu+1)} \cdot q^{-\left(\mu+\frac{1}{2}\right)^2} \end{aligned}\right. \tag{87}$$

ist. Die Gleichung (19) ergiebt:

$$\frac{\vartheta_1(2u+2a,2\tau)}{\vartheta_0(u,\tau)} = \sum_{-\infty}^{+\infty}{}_r\, a_r^{(10)} e^{2(r+1)\pi iu}, \tag{88}$$

wobei nach den Gleichungen (20)

$$\left\{\begin{aligned} a_r^{(10)} &= \lambda^{2r} \cdot q^{r^2+2r} \cdot a_0^{(10)} - 2\pi i \frac{\vartheta_0(2a,2\tau)}{\vartheta_1'} \\ &\quad \cdot \lambda^{2r} q^{r^2+2r+\frac{3}{4}} \sum_1^r{}_\mu \lambda^{-(2\mu-1)} \cdot q^{-\mu^2-\mu} \\ a_{-r}^{(10)} &= \lambda^{-2r} q^{r^2-2r} a_0^{(10)} + 2\pi i \frac{\vartheta_0(2a,2\tau)}{\vartheta_1'} \\ &\quad \cdot \lambda^{-2r} q^{r^2-2r+\frac{3}{4}} \sum_0^{r-1}{}_\mu \lambda^{2\mu+1} q^{-\mu^2+\mu} \end{aligned}\right. \tag{89}$$

ist. Aus Gleichung (21) ergiebt sich

$$\frac{\vartheta_2(2u+2a,2\tau)}{\vartheta_0(u,\tau)} = \sum_0^{+\infty}{}_r\, a_r^{(20)} \cdot e^{2(r+1)\pi iu}, \tag{90}$$

wobei vermöge der Gleichungen (22)

$$\left\{\begin{aligned} a_r^{(20)} &= (-1)^r \cdot \lambda^{2r} \cdot q^{r^2+2r} a_0^{(20)} + 2\pi(-1)^r \frac{\vartheta_3(2a,2\tau)}{\vartheta_1'} \\ &\quad \cdot \lambda^{2r} \cdot q^{r^2+2r+\frac{3}{4}} \sum_1^r{}_\mu (-1)^\mu \lambda^{-(2\mu-1)} q^{-\mu^2-\mu} \\ a_{-r}^{(20)} &= (-1)^r \cdot \lambda^{-2r} \cdot q^{r^2-2r} a_0^{(20)} - 2\pi(-1)^r \frac{\vartheta_3(2a,2\tau)}{\vartheta_1'} \\ &\quad \cdot \lambda^{-2r} q^{r^2-2r+\frac{3}{4}} \sum_0^{r-1}{}_\mu (-1)^\mu \lambda^{2\mu+1} q^{-\mu^2+\mu} \end{aligned}\right. \tag{91}$$

ist. Die jetzt noch übrigen 12 Funktionen würden sich aus den entwickelten vier durch die Substitutionen $u + \frac{1}{2}$, $u + \frac{\tau}{2}$, $u + \frac{1}{2} + \frac{\tau}{2}$ an Stelle von u ergeben. Man sieht aber leicht ein, dafs durch diese Substitutionen die Ausdrücke unter dem Summenzeichen in den Gleichungen (85), (87), (89) und (91) nicht verändert werden können. *Folglich sind diese vier Summen als charakteristisch für die Fourierschen Reihen der Funktionen* $\frac{\vartheta_\alpha(2u + 2a, 2\tau)}{\vartheta_\beta(u, \tau)}$ *zu betrachten.*

Um die Übereinstimmung unserer Resultate mit denen anderer Mathematiker aufzuzeigen, wird es genügen, wenn in den eben hergestellten Formeln sowie in den für die noch nicht betrachteten zwölf Funktionen aufzustellenden die Constante a gleich Null gesetzt wird. Für $a = 0$ ergiebt die Gleichung (86)

$$\frac{\vartheta_3(2u, 2\tau)}{\vartheta_0(u, \tau)} = \sum_{-\infty}^{+\infty r} a_r^{(30)} e^{2r\pi i u}, \tag{92}$$

wo sich jetzt mit Hülfe der Gleichungen (87) für die Coefficienten $a_r^{(30)}$ die Recursionsformel ergiebt:

$$a_r^{(30)} = a_{-r}^{(30)} = (-1)^r q^{r^2} a_0^{(30)} - 2\pi(-1)^r \frac{\vartheta_2(0, 2\tau)}{\vartheta_1'} \cdot q^{r^2} \sum_0^{r-1 \mu} (-1)^\mu q^{-\left(\mu + \frac{1}{2}\right)^2},$$

oder wenn man zur Abkürzung

$$q^{-\left(\frac{1}{2}\right)} - q^{-\left(\frac{3}{2}\right)^2} + \cdots - \cdots (-1)^{m-1} q^{\left(m - \frac{1}{2}\right)^2} = R_m \tag{93}$$

setzt:

$$a_r^{(30)} = a_{-r}^{(30)} = (-1)^r q^{r^2} a_0^{(30)} - 2\pi(-1)^r \frac{\vartheta_2(0, 2\tau)}{\vartheta_1'} q^{r^2} R_r.$$

Setzt man diesen Wert von $a_r^{(30)}$ in (92) ein, so findet man leicht, dafs die Gleichung (92) auch geschrieben werden kann:

$$\frac{\vartheta_3(2u, 2\tau)}{\vartheta_0(u, \tau)} = a_0^{(30)} \cdot \vartheta_0(u, \tau) + 4\pi \frac{\vartheta_2(0, 2\tau)}{\vartheta_1'} \sum_1^{\infty r} (-1)^{r-1} q^{r^2} R_r \cos 2r\pi u. \tag{94}$$

Die Gleichung (88) ergiebt für $a = 0$

$$\frac{\vartheta_1(2u, 2\tau)}{\vartheta_0(u, \tau)} = \sum_{-\infty}^{+\infty r} a_r^{(10)} e^{2(r+1)\pi i u}, \tag{95}$$

wo vermöge der Gleichungen (89) sich ergiebt:

$$a_r^{(10)} = q^{r^2+2r}\, a_0^{(10)} - 2\pi i\, \frac{\vartheta_0(0, 2\tau)}{\vartheta_1'}\, q^{r^2+2r+\frac{3}{4}} \sum_1^r{}^{\mu} q^{-\mu^2-\mu}$$

$$a_{-r}^{(10)} = q^{r^2-2r}\, a_0^{(10)} + 2\pi i\, \frac{\vartheta_0(0, 2\tau)}{\vartheta_1'} \cdot q^{r^2-2r+\frac{3}{4}} \sum_0^{r-1}{}^{\mu} q^{-\mu^2+\mu},$$

oder etwas einfacher:

$$a_r^{(10)} = q^{(r+1)^2} \cdot q^{-1} \cdot a_0^{(10)} - 2\pi i\, \frac{\vartheta_0(0, 2\tau)}{\vartheta_1'}\, q^{(r+1)^2} \sum_1^r{}^{\mu} q^{-\left(\mu+\frac{1}{2}\right)^2}$$

$$a_r^{(10)} = q^{(r-1)^2} \cdot q^{-1} \cdot a_0^{(10)} + 2\pi i\, \frac{\vartheta_0(0, 2\tau)}{\vartheta_1'}\, q^{(r-1)^2} \sum_0^{r-1}{}^{\mu} q^{-\left(\mu-\frac{1}{2}\right)^2}.$$

Nun aber läfst sich hier die Constante $a_0^{(10)}$ folgendermafsen bestimmen: Es ergiebt sich einerseits aus der Gleichung

$$\frac{\vartheta_1(-2u, 2\tau)}{\vartheta_0(-u, \tau)} = -\frac{\vartheta_1(2u, 2\tau)}{\vartheta_0(u, \tau)}$$

leicht die Relation:

$$a_r^{(10)} = -a_{-r-2}^{(10)}; \quad \text{für } r = 0 : a_0^{(10)} = -a_{-2}^{(10)}.$$

Andererseits aber ergiebt die Recursionsformel für $a_{-r}^{(10)}$, wenn in ihr $r = 2$ gesetzt wird:

$$a_{-2}^{(10)} = a_0^{(10)} + 2\pi i\, \frac{\vartheta_0(0, 2\tau)}{\vartheta_1'}\, q^1 \left[q^{-\left(\frac{1}{2}\right)^2} + q^{-\left(\frac{1}{2}\right)^2}\right];$$

also wird

$$a_0^{(10)} = -2\pi i\, \frac{\vartheta_0(0, 2\tau)}{\vartheta_1'} \cdot q^1 \cdot q^{-\left(\frac{1}{2}\right)^2}.$$

Indem man diesen Wert von $a_0^{(10)}$ in den obigen Recursionsformeln einführt und ferner zur Abkürzung

$$(96) \qquad q^{-\left(\frac{1}{2}\right)^2} + q^{-\left(\frac{3}{2}\right)^2} + \cdots + q^{-\left(m-\frac{1}{2}\right)^2} = S_m$$

setzt, so erhält man die Formeln:

$$a_r^{(10)} = -2\pi i\, \frac{\vartheta_0(0, 2\tau)}{\vartheta_1'}\, q^{(r+1)^2} \cdot S_{r+1};$$

$$a_{-r}^{(10)} = 2\pi i\, \frac{\vartheta_0(0, 2\tau)}{\vartheta_1'}\, q^{(r-1)^2}\, S_{r-1}.$$

Man überzeugt sich durch Einsetzung dieser Werte in (95) leicht, dafs die Fouriersche Reihe der Funktion $\frac{\vartheta_1(2u, 2\tau)}{\vartheta_0(u, \tau)}$ sich in die Form bringen läfst:

$$(97) \qquad \frac{\vartheta_1(2u, 2\tau)}{\vartheta_0(u, \tau)} = 4\pi \frac{\vartheta_0(0, 2\tau)}{\vartheta_1'} \sum_1^\infty{}_m q^{m^2} . S_m . \sin 2m\pi u .$$

Wird in Gleichung (90) $a = 0$ gesetzt, so ergiebt sich:

$$(98) \qquad \frac{\vartheta_2(2u, 2\tau)}{\vartheta_0(u, \tau)} = \sum_{-\infty}^{+\infty}{}_r a_r^{(20)} e^{2(r+1)\pi i u},$$

wo vermöge der Gleichungen (91) sich ergiebt:

$$a_r^{(20)} = (-1)^r . q^{(r+1)^2-1} a_0^{(20)} - 2\pi(-1)^r \frac{\vartheta_3(0, 2\tau)}{\vartheta_1'} q^{(r+1)^2} \sum_1^r{}_\mu (-1)^\mu q^{-\left(\mu+\frac{1}{2}\right)^2}$$

$$a_r^{(20)} = (-1)^r q^{(r-1)^2-1} a_0^{(20)} + 2\pi(-1)^r \frac{\vartheta_3(0, 2\tau)}{\vartheta_1'} q^{(r-1)^2} \sum_0^{r-1}{}_\mu (-1)^\mu q^{-\left(\mu-\frac{1}{2}\right)^2}.$$

Führt man für $a_0^{(20)}$ die neue Constante $c_0^{(20)}$ ein, sodafs

$$a_0^{(20)} = -q . \left[c_0^{(20)} + 2\pi \frac{\vartheta_3(0, 2\tau)}{\vartheta_1'} q^{-\left(\frac{1}{2}\right)^2}\right]$$

wird, so erhält man mit Benutzung der abkürzenden Bezeichnung (93)

$$a_r^{(20)} = (-1)^{r+1} c_0^{(20)} q^{(r+1)^2} - 2\pi \frac{\vartheta_3(0, 2\tau)}{\vartheta_1'} q^{(r+1)^2} (-1)^r R_{r+1}$$

$$a_{-r}^{(20)} = (-1)^{r-1} c_0^{(20)} q^{(r-1)^2} - 2\pi \frac{\vartheta_3(0, 2\tau)}{\vartheta_1'} q^{(r-1)^2} (-1)^r R_{r-1}$$

Führt man diese Werte von $a_r^{(20)}$ und $a_{-r}^{(20)}$ in (98) ein, so ergiebt sich

$$(99) \qquad \frac{\vartheta_2(2u, 2\tau)}{\vartheta_0(u, \tau)} = c_0^{(20)} \vartheta_0(u, \tau) + 4\pi \frac{\vartheta_3(0, 2\tau)}{\vartheta_1'} \sum_1^\infty{}_m \left[(-1)^{m-1} . q^{m^2} R_m \cos 2m\pi u\right].$$

Die Gleichung (28) ergiebt für $n = 2$ und $a = 0$

$$(100) \qquad \frac{\vartheta_2(2u, 2\tau)}{\vartheta_1(u, \tau)} = \pi \frac{\vartheta_2(0, 2\tau)}{\vartheta_1'} \cdot \frac{1}{\sin \pi u} + \sum_{-\infty}^{+\infty}{}_r b_r^{(21)} e^{(2r+1)\pi i u},$$

wobei nach den Formeln (29)

$$b_r^{(21)} = (-1)^r q^{r^2+r} . b_0^{(21)} - 2\pi i (-1)^r \frac{\vartheta_2(0, 2\tau)}{\vartheta_1'} . q^{\left(r+\frac{1}{2}\right)^2} \sum_0^{r-1}{}_\mu (-1)^\mu q^{-\left(\mu+\frac{1}{2}\right)^2}$$

$$b_{-r}^{(21)} = (-1)^r q^{r^2-r} . b_0^{(21)} + 2\pi i (-1)^r \frac{\vartheta_2(0, 2\tau)}{\vartheta_1'} . q^{\left(r-\frac{1}{2}\right)^2} \sum_0^{r-1}{}_\mu (-1)^\mu q^{-\left(\mu-\frac{1}{2}\right)^2}$$

ist. Man findet leicht, dafs mit Benutzung der letzten Relationen sich die Gleichung (100) in die Form bringen läfst:

$$(101)\qquad \frac{\vartheta_2(2u,2\tau)}{\vartheta_1(u,\tau)} = ib_0^{(21)} \cdot q^{-\frac{1}{4}}\,\vartheta_1(u,\tau) + \pi\,\frac{\vartheta_2(0,2\tau)}{\vartheta_1'}\left[\frac{1}{\sin\pi u} + 4\sum_1^\infty (-1)^m q^{\left(m+\frac{1}{2}\right)^2} \cdot R_m \sin(2m+1)\pi u\right].$$

Setzt man in Gleichung (30) $a = 0$ und $n = 2$, so findet sich

$$(102)\qquad \frac{\vartheta_0(2u,2\tau)}{\vartheta_1(u,\tau)} = \pi\,\frac{\vartheta_0(0,2\tau)}{\vartheta_1'}\,\frac{e^{-2\pi iu}}{\sin\pi u} + \sum_{-\infty}^{+\infty} b_r^{(01)} \cdot e^{(2r-1)\pi iu},$$

wobei dann die Relationen bestehen:

$$b_r^{(01)} = q^{r^2-r} b_0^{(01)} - 2\pi i\,\frac{\vartheta_0(0,2\tau)}{\vartheta_1'}\,q^{\left(r-\frac{1}{2}\right)^2} \sum_0^{r-1} q^{-\left(\mu-\frac{1}{2}\right)^2}$$

$$b_{-r}^{(01)} = q^{r^2+r} b_0^{(01)} + 2\pi i\,\frac{\vartheta_0(0,2\tau)}{\vartheta_1'}\,q^{\left(r+\frac{1}{2}\right)^2} \sum_1^{r-1} q^{-\left(\mu+\frac{1}{2}\right)^2}.$$

Aber der Wert von $b_0^{(01)}$ kann leicht bestimmt werden. Man darf nämlich, wie man leicht zeigen kann, in (102) $-u$ an Stelle von u setzen. Dadurch geht diese Gleichung über in die folgende:

$$\frac{\vartheta_0(2u,2\tau)}{\vartheta_1(u,\tau)} = \pi\,\frac{\vartheta_0(0,2\tau)}{\vartheta_1'}\,\frac{e^{2\pi iu}}{\sin\pi u} - \sum_{-\infty}^{+\infty} b_{-(r-1)}^{(01)}\, e^{(2r-1)\pi iu}.$$

Subtrahiert man von dieser Gleichung die Gleichung (102), so bleibt

$$0 = 2\pi i\,\frac{\vartheta_0(0,2\tau)}{\vartheta_1'}\,[e^{\pi iu} + e^{-\pi iu}] - \sum_{-\infty}^{+\infty}\left[b_{-(r-1)}^{(01)} + b_r^{(01)}\right] e^{(2r-1)\pi iu}.$$

Hier mufs der Faktor einer jeden Potenz von $e^{\pi iu}$ für sich identisch der Null gleich werden. Man erhält infolge dessen im Allgemeinen

$$(103\,a)\qquad b_r^{(01)} = -\,b_{-(r-1)}^{(01)},$$

dagegen für $r = 0$:

$$(103\,b)\qquad 2\pi i\,\frac{\vartheta_0(0,2\tau)}{\vartheta_1'} - b_1^{(01)} - b_0^{(01)} = 0.$$

Aber nach den obigen Gleichungen wird:

$$b_1^{(01)} = b_0^{(01)} - 2\pi i\,\frac{\vartheta_0(0,2\tau)}{\vartheta_1'}.$$

Daraus folgt

$$b_0^{(01)} = 2\pi i\,\frac{\vartheta_0(0,2\tau)}{\vartheta_1'};\quad b_1^{(01)} = 0.$$

Infolge dessen lassen sich die Recursionsformeln für die $b_r^{(01)}$ in folgende Form bringen:

$$b_r^{(01)} = -2\pi i \frac{\vartheta_0(0, 2\tau)}{\vartheta_1'} \cdot q^{\left(r-\frac{1}{2}\right)^2} \cdot S_{r-1};$$

$$b_{-r}^{(01)} = 2\pi i \frac{\vartheta_0(0, 2\tau)}{\vartheta_1'} \cdot q^{\left(r+\frac{1}{2}\right)^2} \cdot S_r.$$

Gleichung (102) nimmt dann folgende Gestalt an:

(104)
$$\frac{\vartheta_0(2u, 2\tau)}{\vartheta_1(u, \tau)} = 2\pi \frac{\vartheta_0(0, 2\tau)}{\vartheta_1'} \left[\frac{1}{\sin \pi u} + 2 \sum_1^\infty {}^m q^{\left(m+\frac{1}{2}\right)^2} S_m . \sin (2m+1)\pi u \right].$$

Aus der Gleichung (32) findet man durch eine einfache Rechnung:

(105)
$$\frac{\vartheta_3(2u, 2\tau)}{\vartheta_1(u, \tau)} = c_0^{(31)} \vartheta_1(u, \tau) + \pi \frac{\vartheta_3(0, 2\tau)}{\vartheta_1'} \left[\frac{1}{\sin \pi u} + 4 \sum_1^\infty {}^m (-1)^m q^{\left(m+\frac{1}{2}\right)^2} . R_m . \sin (2m+1)\pi u \right].$$

Aus den eben entwickelten Funktionen können durch die Substitution $u + \frac{1}{2}$ an Stelle von u die noch fehlenden Entwicklungen abgeleitet werden.

$$\frac{\vartheta_1(2u, 2\tau)}{\vartheta_3(u, \tau)} = 4\pi \frac{\vartheta_0(0, 2\tau)}{\vartheta_1'} \sum_1^\infty {}^m (-1)^{m-1} . q^{m^2} . S_m . \sin 2m\pi u.$$

$$\frac{\vartheta_2(2u, 2\tau)}{\vartheta_3(u, \tau)} = -c_0^{(20)} \vartheta_3(u, \tau) - 4\pi \frac{\vartheta_3(0, 2\tau)}{\vartheta_1'} \sum_1^\infty {}^m q^{m^2} . R_m . \cos 2m\pi u.$$

$$\frac{\vartheta_3(2u, 2\tau)}{\vartheta_3(u, \tau)} = a_0^{(30)} \vartheta_3(u, \tau) + 4\pi \frac{\vartheta_2(0, 2\tau)}{\vartheta_1'} \sum_1^\infty {}^m q^{m^2} . R_m . \cos 2m\pi u.$$

$$\frac{\vartheta_0(2u, 2\tau)}{\vartheta_2(u, \tau)} = \pi \frac{\vartheta_0(0, 2\tau)}{\vartheta_1'} \left[\frac{1}{\cos \pi u} + 4 \sum_1^\infty {}^m (-1)^m q^{\left(m+\frac{1}{2}\right)^2} . S_m \cos (2m+1)\pi u \right].$$

$$\frac{\vartheta_2(2u, 2\tau)}{\vartheta_2(u, \tau)} = -ib_0^{(21)} . q^{-\frac{1}{4}} \vartheta_1(u, \tau) - \pi \frac{\vartheta_2(0, 2\tau)}{\vartheta_1'} \left[\frac{1}{\cos \pi u} + 4 \sum_1^\infty {}^m q^{\left(m+\frac{1}{2}\right)^2} . R_m . \cos (2m+1)\pi u \right].$$

$$\frac{\vartheta_3(2u, 2\tau)}{\vartheta_2(u, \tau)} = c_0^{(31)} \cdot \vartheta_2(u\tau) + \pi \frac{\vartheta_3(0, 2\tau)}{\vartheta_1'} \left[\frac{1}{\cos \pi u} + 4 \sum_1^\infty {}^m q^{\left(m+\frac{1}{2}\right)^2} . R_m . \cos(2m+1)\pi u \right].$$

In der Arbeit von Biehler, mit deren Resultaten die soeben gefundenen jetzt verglichen werden sollen, finden sich nun nicht die Entwickelungen der Funktionen $\frac{\vartheta_\alpha(2u, 2\tau)}{\vartheta_\beta(u, \tau)}$, sondern vielmehr die Entwicklungen der Funktionen $\frac{\vartheta_\alpha(u) \cdot \vartheta_\beta(u)}{\vartheta_\gamma(u)}$. Indessen lassen sich die letzteren Entwickelungen direkt auf die von uns angegebenen reducieren mit Hülfe der folgenden sechs bekannten Gleichungen:

$$(106) \quad \begin{cases} \vartheta_1^2(z, \tau) = \vartheta_2(0, 2\tau)\, \vartheta_3(2z, 2\tau) - \vartheta_3(0, 2\tau)\, \vartheta_2(2z, 2\tau). \\ \vartheta_1(z, \tau)\, \vartheta_2(z, \tau) = \vartheta_0(0, 2\tau)\, \vartheta_1(2z, 2\tau). \\ \vartheta_0^2(z, \tau) = \vartheta_3(0, 2\tau)\, \vartheta_3(2z, 2\tau) - \vartheta_2(0, 2\tau)\, \vartheta_2(2z, 2\tau). \\ \vartheta_0(z, \tau) \cdot \vartheta_3(z, \tau) = \vartheta_0(0, 2\tau)\, \vartheta_0(2z, 2\tau). \\ \vartheta_2^2(z, \tau) = \vartheta_2(0, 2\tau)\, \vartheta_3(2z, 2\tau) + \vartheta_3(0, 2\tau)\, \vartheta_2(2z, 2\tau). \\ \vartheta_3^2(z, \tau) = \vartheta_2(0, 2\tau)\, \vartheta_2(2z, 2\tau) + \vartheta_3(0, 2\tau)\, \vartheta_3(2z, 2\tau). \end{cases}$$

Hieraus folgt z. B.

$$\frac{\vartheta_1^2(z, \tau)}{\vartheta_0(z, \tau)} = \vartheta_2(0, 2\tau) \cdot \frac{\vartheta_3(2z, 2\tau)}{\vartheta_0(z, \tau)} - \vartheta_3(0, 2\tau) \cdot \frac{\vartheta_2(2z, 2\tau)}{\vartheta_0(z, \tau)}.$$

Also wenn man für die beiden Funktionen auf der rechten Seite ihre oben in den Gleichungen (94) und (99) gefundenen Fourierschen Reihen einsetzt, so ergiebt sich:

$$\frac{\vartheta_1^2(z)}{\vartheta_0(z)} = A\vartheta_0(z) + \frac{4\pi}{\vartheta_1'} [\vartheta_2^2(0, 2\tau) - \vartheta_3^2(0, 2\tau)] \sum_1^\infty {}^m \left[(-1)^{m-1} q^{m^2} . R_m . \cos 2m\pi z \right],$$

wo zur Abkürzung

$$(107) \qquad A = \vartheta_2(0, 2\tau)\, a_0^{(30)} - \vartheta_3(0, 2\tau)\, c_0^{(20)}$$

gesetzt wurde. Biehler findet jetzt für dieselbe Funktion

$$(108) \qquad \frac{\vartheta_1^2(z)}{\vartheta_0(z)} = A\vartheta_0(z) + 4 \frac{\vartheta_0}{\vartheta_2\, \vartheta_3} \sum_1^\infty {}^m (-1)^m q^{m^2} . R_m . \cos 2m\pi z,$$

wo A bei Biehler eine noch zu bestimmende Constante bedeutet. Die beiden Entwickelungen wären als nicht verschieden nachgewiesen, wenn sich zeigen liefse, dafs

$$-\frac{\vartheta_0}{\vartheta_2\, \vartheta_3} = \frac{\pi}{\vartheta_1'} [\vartheta_2^2(0, 2\tau) - \vartheta_3^2(0, 2\tau)]$$

ist. Aber diese Relation folgt ohne weiteres aus der dritten der Gleichungen (106), wenn man darin das Argument der Null gleich werden läfst. Dann wird nämlich sich ergeben:

$$\vartheta_0^2 = \vartheta_3^2(0, 2\tau) - \vartheta_2^2(0, 2\tau).$$

Indem man durch die bekannte Gleichung $\vartheta_0\vartheta_2\vartheta_3 = \frac{1}{\pi}\vartheta_1'$ dividiert, ergiebt sich die gewünschte Formel. Es ist also wenigstens für *ein* Beispiel gezeigt, dafs unsere Resultate mit den Biehlerschen sich vollkommen decken, abgesehen von der Constante A, die Biehler auf andere Weise bestimmt, als wir es werden thun müssen. Vermöge der Gleichung (107) sieht man nämlich, dafs die Bestimmung der Constante A auf die Bestimmung der Gröfsen $a_0^{(30)}$ und $c_0^{(20)}$, d. h. $a_0^{(30)}$ und $a_0^{(20)}$ zurückkommt. Die beiden letzteren Gröfsen aber kann man mit Benutzung der Gleichung (83) leicht bestimmen. Jedoch würde die wirkliche Berechnung von A nach der eben angedeuteten Methode und die Vergleichung des gefundenen mit dem Biehlerschen Ausdruck uns zu weit führen.

Genau so, wie für das behandelte Beispiel, ergiebt sich jetzt allgemein das Resultat: *Unsere Resultate stimmen vollständig mit denjenigen Biehlers überein, indem die durch die Vergleichung der beiderseitigen Formeln sich ergebenden Thetarelationen aus den Gleichungen* (106) *durch Nullsetzung des Arguments abgeleitet werden können.*

§ 2.

Der Fall $n = 3$.

Es sollen zunächst die Resultate des § 1 des vorigen Abschnittes auf den Fall $n = 3$ angewandt werden, doch soll dieser Fall mit geringerer Ausführlichkeit behandelt werden, als der Fall $n = 2$.

Die Gleichungen in § 1 des vorigen Abschnittes ergeben:

$$\frac{\vartheta_0(3u + 3a, 3\tau)}{\vartheta_0(u, \tau)} = \sum_0^1 \sum_{-\infty}^{+\infty} a_{k+2r}^{(00)} \cdot e^{2[k+2r]\pi i u},$$

wo die Coefficienten den Gleichungen genügen werden:

$$a_{k+2r}^{(00)} = \lambda^{2r} \cdot q^{2r^2+2kr} a_k^{(00)}$$
$$- 2\pi i \frac{\vartheta_1(3a, 3\tau)}{\vartheta_1'} \lambda^{2r} \cdot q^{2r^2+(2r-1)k} \sum_0^{r-1} \lambda^{-(2\mu+1)} \cdot q^{-2\left(\mu+\frac{1}{2}\right)^2 - 2k\mu},$$

oder wenn man gleich die beiden Fälle $k = 0$ und $k = 1$ durch besondere Formeln berücksichtigt

$$(109\,a)\quad \begin{cases} a_{2r}^{(00)} = \lambda^{2r}\cdot q^{2r^2} a_0^{(00)} \\ \quad -2\pi i \frac{\vartheta_1(3a,\,3\tau)}{\vartheta_1'}\,\lambda^{2r}\cdot q^{2r^2}\sum_0^{r-1}{}^{\mu}\,\lambda^{-(2\mu+1)}\cdot q^{-2\left(\mu+\frac{1}{2}\right)^2} \\ a_{2r+1}^{(00)} = \lambda^{2r}\cdot q^{2(r^2+r)} a_1^{(00)} \\ \quad -2\pi i \frac{\vartheta_1(3a,\,3\tau)}{\vartheta_1'}\,\lambda^{2r}\cdot q^{2(r^2+r)-1}\sum_0^{r-1}{}^{\mu}\,\lambda^{-(2\mu+1)}\cdot q^{-2\left(\mu+\frac{1}{2}\right)^2-2\mu}. \end{cases}$$

Ganz analog erhält man:

$$(109\,b)\quad \begin{cases} a_{-2r}^{(00)} = \lambda^{-2r}\cdot q^{2r^2}\cdot a_0^{(00)} \\ \quad +2\pi i \frac{\vartheta_1(3a,\,3\tau)}{\vartheta_1'}\,\lambda^{-2r}\cdot q^{2r^2}\sum_0^{r-1}{}^{\mu}\,\lambda^{2\mu+1}\cdot q^{-2\left(\mu+\frac{1}{2}\right)^2} \\ a_{-2r+1}^{(00)} = \lambda^{-2r}\cdot q^{2(r^2-r)} a_1^{(00)} \\ \quad +2\pi i \frac{\vartheta_1(3a,\,3\tau)}{\vartheta_1'}\,\lambda^{-2r}\cdot q^{2(r^2-r)+1}\sum_0^{r-1}{}^{\mu}\,\lambda^{2\mu+1}\,q^{-2\left(\mu+\frac{1}{2}\right)^2+2\mu}. \end{cases}$$

Ferner wird nach Gleichung (17)

$$(110)\qquad \frac{\vartheta_3(3u+3a,\,3\tau)}{\vartheta_0(u,\,\tau)} = \sum_0^1{}^{k}\sum_{-\infty}^{+\infty}{}^{r} a_{k+2r}^{(30)}\cdot e^{2(k+2r)\pi i u},$$

wo sich für die Coefficienten die Relationen ergeben:

$$(111)\quad \begin{cases} a_{2r}^{(30)} = (-1)^r\lambda^{2r}\cdot q^{2r^2}\cdot a_0^{(30)} \\ \quad -2\pi(-1)^r\frac{\vartheta_2(3a,\,3\tau)}{\vartheta_1'}\cdot\lambda^{2r}\cdot q^{2r^2}\sum_0^{r-1}{}^{\mu}(-1)^\mu\lambda^{-(2\mu+1)}\cdot q^{-2\left(\mu+\frac{1}{2}\right)^2} \\ a_{2r+1}^{(30)} = (-1)^r\lambda^{2r}\cdot q^{2(r^2+r)} a_1^{(30)} \\ -2\pi(-1)^r\frac{\vartheta_2(3a,\,3\tau)}{\vartheta_1'}\lambda^{2r}\cdot q^{2(r^2+r)-1}\sum_0^{r-1}{}^{\mu}(-1)^\mu\lambda^{-(2\mu+1)}\cdot q^{-2\left(\mu+\frac{1}{2}\right)^2-2\mu} \\ a_{-2r}^{(30)} = (-1)^r\cdot\lambda^{-2r}\cdot q^{2r^2}\cdot a_0^{(30)} \\ \quad -2\pi(-1)^r\frac{\vartheta_2(3a,\,3\tau)}{\vartheta_1'}\lambda^{-2r}\cdot q^{2r^2}\sum_0^{r-1}{}^{\mu}(-1)^\mu\lambda^{2\mu+1}\cdot q^{-2\left(\mu+\frac{1}{2}\right)^2} \\ a_{-2r+1}^{(30)} = (-1)^r\cdot\lambda^{-2r}\cdot q^{2(r^2-r)} a_1^{(30)} \\ -2\pi(-1)^r\frac{\vartheta_2(3a,\,3\tau)}{\vartheta_1'}\cdot\lambda^{-2r}\cdot q^{2(r^2-r)+1}\sum_0^{r-1}{}^{\mu}(-1)^\mu\lambda^{2\mu+1}\cdot q^{-2\left(\mu+\frac{1}{2}\right)^2+2\mu}. \end{cases}$$

Aus Gleichung (19) folgt:

$$(112)\qquad \frac{\vartheta_1(3u+3a,\,3\tau)}{\vartheta_0(u,\,\tau)} = \sum_0^1{}^{k}\sum_{-\infty}^{+\infty}{}^{r} a_{k+2r}^{(10)}\cdot e^{[2k+1+2(2r+1)]\pi i u},$$

wobei

$$(113)\quad \begin{cases} a_{2r}^{(10)} = \lambda^{2r}\cdot q^{2r^2+3r}a_0^{(10)} \\ \quad -2\pi i\frac{\vartheta_0(3a,3\tau)}{\vartheta_1'}\lambda^{2r}\cdot q^{2r^2+3r+1}\sum_1^r{}^{\mu}\lambda^{-(2\mu-1)}\cdot q^{-2\mu^2-\mu} \\ a_{2r+1}^{(10)} = \lambda^{2r}\cdot q^{2r^2+5r}a_1^{(10)} \\ \quad -2\pi i\frac{\vartheta_0(3a,3\tau)}{\vartheta_1'}\lambda^{2r}\cdot q^{2r^2+5r+2}\sum_1^r{}^{\mu}\lambda^{-(2\mu-1)}\cdot q^{-2\mu^2-3\mu} \\ a_{-2r}^{(10)} = \lambda^{-2r}\cdot q^{2r^2-3r}a_0^{(10)} \\ \quad +2\pi i\frac{\vartheta_0(3a,3\tau)}{\vartheta_1'}\lambda^{-2r}\cdot q^{2r^2-3r+1}\sum_0^{r-1}{}^{\mu}\lambda^{2\mu+1}\cdot q^{-2\mu^2+\mu} \\ a_{-2r+1}^{(10)} = \lambda^{-2r}\cdot q^{2r^2-5r}a_1^{(10)} \\ \quad +2\pi i\frac{\vartheta_0(3a,3\tau)}{\vartheta_1'}\lambda^{-2r}\cdot q^{2r^2-5r+2}\sum_0^{r-1}{}^{\mu}\lambda^{2\mu+1}\cdot q^{-2\mu^2+3\mu} \end{cases}$$

ist. Schliefslich ergiebt die Gleichung (21)

$$(114)\qquad \frac{\vartheta_2(3u+3a,\ 3\tau}{\vartheta_0(u,\ \tau)} = \sum_0^1{}^{k}\sum_{-\infty}^{+\infty}{}^{r}a_{k+2r}^{(20)}\cdot e^{[2k+1+2(2r+1)]\pi i u},$$

wo

$$(115)\quad \begin{cases} a_{2r}^{(20)} = (-1)^r\lambda^{2r}\cdot q^{2r^2+3r}a_0^{(20)} \\ \quad +2\pi(-1)^r\frac{\vartheta_3(3a,3\tau)}{\vartheta_1'}\cdot\lambda^{2r}\cdot q^{2r^2+3r+1}\sum_1^r{}^{\mu}(-1)^{\mu}\lambda^{-(2\mu-1)}q^{-2\mu^2-\mu} \\ a_{2r+1}^{(20)} = (-1)^r\lambda^{2r}\cdot q^{2r^2+5r}a_1^{(20)} \\ \quad +2\pi(-1)^r\frac{\vartheta_3(3a,3\tau)}{\vartheta_1'}\cdot\lambda^{2r}\cdot q^{2r^2+5r+2}\sum_1^r{}^{\mu}(-1)^{\mu}\lambda^{-(2\mu-1)}q^{-2\mu^2-3\mu} \\ a_{-2r}^{(20)} = (-1)^r\cdot\lambda^{-2r}\cdot q^{2r^2-3r}a_0^{(20)} \\ \quad -2\pi(-1)^r\frac{\vartheta_3(3a,3\tau)}{\vartheta_1'}\cdot\lambda^{-2r}\cdot q^{2r^2-3r+1}\sum_0^{r-1}{}^{\mu}(-1)^{\mu}\lambda^{2\mu+1}\cdot q^{-2\mu^2+\mu} \\ a_{-2r+1}^{(20)} = (-1)^r\lambda^{-2r}\cdot q^{2r^2-5r}a_1^{(20)} \\ \quad -2\pi(-1)^r\frac{\vartheta_3(3a,3\tau)}{\vartheta_1'}\lambda^{-2r}\cdot q^{2r^2-5r+2}\sum_0^{r-1}{}^{\mu}(-1)^{\mu}\cdot\lambda^{2\mu+1}\cdot q^{-2\mu^2+3\mu} \end{cases}$$

ist.

Alle andern Funktionen lassen sich aus den Funktionen, deren Entwicklung soeben ausführlich gegeben ist, lediglich durch Substitution von $u+\frac{1}{2}$, $u+\frac{\tau}{2}$, $u+\frac{1}{2}+\frac{\tau}{2}$ an Stelle von u in trigonometrische Reihen entwickeln, und es ist klar, dafs durch diese Substitutionen die Ausdrücke, welche unter dem Summenzeichen auf den rechten Seiten der Gleichungen für die Coefficienten auftreten, nicht

verändert werden können. *Diese Summen in den Gleichungen* (109), (111), (113) *und* (115) *werden daher als charakteristisch für den Fall* $n = 3$ *angesehen werden können.*

Zum Zweck der Vergleichung unserer Resultate mit den Biehlerschen möge von der Formel ausgegangen werden:

$$\vartheta_1(v)\,\vartheta_2(v)\,\vartheta_3(v) = q^{\frac{1}{4}}\,\vartheta_0\left(\frac{\tau}{2}, 2\tau\right)\left[\vartheta_0\left(\frac{\tau}{2}, 6\tau\right) - i\vartheta_1\left(\frac{\tau}{2}, 6\tau\right)\right]$$
$$\cdot\left[e^{\pi i v}\,\vartheta_1\left(3v + \frac{\tau}{2}, 3\tau\right) + e^{-\pi i v}\,\vartheta_1\left(3v - \frac{\tau}{2}, 3\tau\right)\right],^{*})$$

oder wenn zur Abkürzung

$$q^{\frac{1}{4}} \cdot \vartheta_0\left(\frac{\tau}{2}, 2\tau\right)\left[\vartheta_0\left(\frac{\tau}{2}, 6\tau\right) - i\vartheta_1\left(\frac{\tau}{2}, 6\tau\right)\right] = A$$

gesetzt wird:

$$\vartheta_1(v)\vartheta_2(v)\vartheta_3(v)$$
$$(116) \qquad = A\left[e^{\pi i v}\,\vartheta_1\left(3v + \frac{\tau}{2}, 3\tau\right) + e^{-\pi i v}\,\vartheta_1\left(3v - \frac{\tau}{2}, 3\tau\right)\right].$$

Folglich wird

$$\frac{\vartheta_1(v)\vartheta_2(v)\vartheta_3(v)}{\vartheta_0(v)}$$
$$(117) \qquad = A\left[e^{\pi i v} \cdot \frac{\vartheta_1\left(3v + \frac{\tau}{2}, 3\tau\right)}{\vartheta_0(v, \tau)} + e^{-\pi i v} \cdot \frac{\vartheta_1\left(3v - \frac{\tau}{2}, 3\tau\right)}{\vartheta_0(v, \tau)}\right].$$

Setzt man jetzt

$$e^{\pi i v} \cdot \frac{\vartheta_1\left(3v + \frac{\tau}{2}, 3\tau\right)}{\vartheta_0(v, \tau)} = \psi(v),$$

so ergiebt sich nach Gleichung (112), indem man darin $a = \frac{\tau}{6}$, also $\lambda = q^{\frac{1}{2}}$ setzt:

$$(118) \qquad \psi(u) = \sum_{0}^{1}{}_{k} \sum_{-\infty}^{+\infty}{}_{r} a_{k+2r}^{(10)} \cdot e^{2[k+2(r+1)]\pi i u},$$

wo jetzt vermöge der Gleichungen (113) die Coefficienten folgende Relationen erfüllen werden:

$$a_{2r}^{(10)} = q^r \cdot q^{2r^2+3r} \cdot a_0^{(10)}$$
$$- 2\pi i \frac{\vartheta_0\left(\frac{\tau}{2}, 3\tau\right)}{\vartheta_1'} \cdot q^r \cdot q^{2r^2+3r+1} \sum_{1}^{r}{}_{\mu} q^{-\frac{2\mu-1}{2}} \cdot q^{-2\mu^2-\mu},$$

---

*) Zur Ableitung dieser und ähnlicher Formeln vergleiche man z. B. die Doktordissertation von Heinrich Möller, Rostock 1888.

oder

$$a_{2r}^{(10)} = q^{2(r+1)^2-2} \cdot a_0^{(10)} - 2\pi i \frac{\vartheta_0\left(\frac{\tau}{2}, 3\tau\right)}{\vartheta_1'} \cdot q^{2(r+1)^2} \sum_1^r{}_\mu q^{-2\left(\mu+\frac{1}{2}\right)^2},$$

also

$$(119a) \quad a_{2(r-1)}^{(10)} = q^{2r^2} \cdot q^{-2} a_0^{(10)} - 2\pi i \frac{\vartheta_0\left(\frac{\tau}{2}, 3\tau\right)}{\vartheta_1'} q^{2r^2} \sum_1^{r-1}{}_\mu q^{-2\left(\mu+\frac{1}{2}\right)^2}.$$

Ganz ebenso ergiebt sich

$$a_{2r+1}^{(10)} = q^{2\left(r+\frac{3}{2}\right)^2 - \frac{9}{2}} \cdot a_1^{(10)} - 2\pi i \frac{\vartheta_0\left(\frac{\tau}{2}, 3\tau\right)}{\vartheta_1'} q^{2\left(r+\frac{3}{2}\right)^2} \sum_1^r{}_\mu q^{-2(\mu+1)^2},$$

also

$$(119b) \quad \begin{aligned} a_{2r-1}^{(10)} &= q^{2\left(r+\frac{1}{2}\right)^2} \cdot q^{-\frac{9}{2}} a_1^{(10)} \\ &\quad - 2\pi i \frac{\vartheta_0\left(\frac{\tau}{2}, 3\tau\right)}{\vartheta_1'} \cdot q^{2\left(r+\frac{1}{2}\right)^2} \sum_1^{r-1}{}_\mu q^{-2(\mu+1)^2}. \end{aligned}$$

Ferner

$$a_{-2r}^{(10)} = q^{-r} \cdot q^{2r^2-3r} a_0^{(10)} + 2\pi i \frac{\vartheta_0\left(\frac{\tau}{2}, 3\tau\right)}{\vartheta_1'} q^{-r} \cdot q^{2r^2-3r+1} \sum_0^{r-1}{}_\mu q^{\frac{2\mu+1}{2} - 2\mu^2+\mu},$$

also

$$(119c) \quad a_{-2(r+1)}^{(10)} = q^{2r^2} \cdot q^{-2} a_0^{(10)} + 2\pi i \frac{\vartheta_0\left(\frac{\tau}{2}, 3\tau\right)}{\vartheta_1'} q^{2r^2} \sum_0^r{}_\mu q^{-2\left(\mu-\frac{1}{2}\right)^2}.$$

Endlich

$$a_{-2r+1}^{(10)} = q^{2\left(r-\frac{3}{2}\right)^2} \cdot q^{-\frac{9}{2}} a_1^{(10)} + 2\pi i \frac{\vartheta_0\left(\frac{\tau}{2}, 3\tau\right)}{\vartheta_1'} q^{2\left(r-\frac{3}{2}\right)^2} \sum_0^{r-1}{}_\mu q^{-2(\mu-1)^2},$$

oder, indem $r+2$ an Stelle von r gesetzt wird

$$(119d) \quad \begin{aligned} a_{-2r-3}^{(10)} &= q^{2\left(r+\frac{1}{2}\right)^2} \cdot q^{-\frac{9}{2}} \cdot a_1^{(10)} \\ &\quad + 2\pi i \frac{\vartheta_0\left(\frac{\tau}{2}, 3\tau\right)}{\vartheta_1'} q^{2\left(r+\frac{1}{2}\right)^2} \sum_0^{r+1}{}_\mu q^{-2(\mu-1)^2}. \end{aligned}$$

Jetzt kann die Gleichung (118) geschrieben werden

$$\psi(u) = \sum_{-\infty}^{+\infty}{}_r a_{2(r-1)}^{(10)} \cdot e^{4r\pi i u} + \sum_{-\infty}^{+\infty}{}_r a_{2r-1}^{(10)} e^{2(2r+1)\pi i u}.$$

Folglich wird

$$\psi(-u) = \sum_{-\infty}^{-\infty}{}_r a_{2(r-1)}^{(10)} \cdot e^{-4r\pi i u} + \sum_{-\infty}^{+\infty}{}_r a_{2r-1}^{(10)} \cdot e^{-2(2r+1)\pi i u},$$

oder wie man leicht sieht,

$$\psi(-u) = \sum_{-\infty}^{+\infty r} a^{(10)}_{-2(r+1)} \cdot e^{4r\pi iu} + \sum_{-\infty}^{+\infty r} a^{(10)}_{-2r-3} \cdot e^{2(2r+1)\pi iu}.$$

Man erhält also

$$\begin{aligned}\psi(u) - \psi(-u) &= \sum_{-\infty}^{+\infty r} \left[a^{(10)}_{2(r-1)} - a^{(10)}_{-2(r+1)}\right] e^{4r\pi iu} \\ &\quad + \sum_{-\infty}^{+\infty r} \left[a^{(10)}_{2r-1} - a^{(10)}_{-2r-3}\right] \cdot e^{2(2r+1)\pi iu}.\end{aligned} \tag{120}$$

In der ersten der Summen auf der rechten Seite dieser Gleichung wird das von u unabhängige Glied der Null gleich, und die Summe kann in die folgenden beiden Teile zerlegt werden:

$$\sum_{1}^{\infty r}\left[a^{(10)}_{2(r-1)} - a^{(10)}_{2(r+1)}\right] e^{4r\pi iu} + \sum_{1}^{\infty r}\left[a^{(10)}_{-2(r+1)} - a^{(10)}_{2(r-1)}\right] \cdot e^{-4r\pi iu}$$

$$= 2i \sum_{1}^{\infty r}\left[a^{(10)}_{2(r-1)} - a^{(10)}_{-2(r+1)}\right] \sin 4r\pi u.$$

Nun aber wird nach den Gleichungen (119a) und (119c):

$$a^{(10)}_{2(r-1)} - a^{(10)}_{-2(r+1)}$$

$$= -2\pi i \frac{\vartheta_0\left(\frac{\tau}{2}, 3\tau\right)}{\vartheta_1'} q^{2r^2}\left[\sum_{1}^{r-1\mu} q^{-2\left(\mu+\frac{1}{2}\right)^2} + \sum_{0}^{r\mu} q^{-2\left(\mu-\frac{1}{2}\right)^2}\right],$$

oder wenn man zur Abkürzung

$$2\left[q^{-2\left(\frac{1}{2}\right)^2} + q^{-2\left(\frac{3}{2}\right)^2} + \cdots + q^{-2\left(r-\frac{1}{2}\right)^2}\right] = D_r$$

setzt

$$a^{(10)}_{2(r-1)} - a^{(10)}_{-2(r+1)} = -2\pi i \frac{\vartheta_0\left(\frac{\tau}{2}, 3\tau\right)}{\vartheta_1'} q^{2r^2} D_r.$$

Die zweite Summe auf der rechten Seite von (120) kann geschrieben werden:

$$\sum_{0}^{\infty r}\left[a^{(10)}_{2r-1} - a^{(10)}_{-2r-3}\right] e^{2(2r+1)\pi iu} + \sum_{0}^{\infty r}\left[a^{(10)}_{-2r-3} - a^{(10)}_{2r-1}\right] e^{-2(2r+1)\pi iu}$$

$$= 2i \sum_{0}^{\infty r}\left[a^{(10)}_{2r-1} - a^{(10)}_{-2r-3}\right] \cdot \sin 2(2r+1)\pi u.$$

Nun aber wird nach den Gleichungen (119b) und (119d):

$$a^{(10)}_{2r-1} - a^{(10)}_{-2r-3}$$

$$= -2\pi i \frac{\vartheta_0\left(\frac{\tau}{2}, 3\tau\right)}{\vartheta_1'} \cdot q^{2\left(r+\frac{1}{2}\right)^2}\left[\sum_{1}^{r-1\mu} q^{-2(\mu+1)^2} + \sum_{0}^{r+1\mu} q^{-2(\mu-1)^2}\right],$$

oder wenn zur Abkürzung

$$1 + 2q^{-2\cdot 1^2} + 2\cdot q^{-2\cdot 2^2} + \cdots 2q^{-2\cdot r^2} = E_r$$

gesetzt wird:

$$a^{(10)}_{2r-1} - a^{(10)}_{-2r-3} = -2\pi i \frac{\vartheta_0\left(\frac{\tau}{2}, 3\tau\right)}{\vartheta_1'} q^{2\left(r+\frac{1}{2}\right)^2} \cdot E_r .$$

Folglich erhält man die folgende Fouriersche Reihe:

$$\psi(u) - \psi(-u)$$
$$= 4\pi \frac{\vartheta_0\left(\frac{\tau}{2}, 3\tau\right)}{\vartheta_1'} \cdot \left[\sum_1^\infty q^{2r^2} D_r \sin 4r\pi u + \sum_1^\infty q^{2\left(r+\frac{1}{2}\right)^2} E_r \sin 2(2r+1)\pi u \right].$$

Aber nach Gleichung (117) ergiebt sich

$$\psi(u) - \psi(-u) = \frac{\vartheta_1(u)\,\vartheta_2(u)\,\vartheta_3(u)}{A\,\vartheta_0(u)},$$

sodafs auch für die letztere Funktion die Fouriersche Reihe gefunden ist. Vergleicht man unser Resultat mit dem von Biehler gefundenen, so ergiebt sich, dafs die beiden Entwicklungen vollkommen identisch sind, wenn noch die Identität

$$\frac{2\pi\vartheta_0\left(\frac{\tau}{2}, 3\tau\right)}{\vartheta_1'} = \frac{1}{A}; \quad \text{oder} \quad \vartheta_0 \cdot \vartheta_2 \cdot \vartheta_3 = 2A \cdot \vartheta_0\left(\frac{\tau}{2}, 3\tau\right)$$

als richtig erwiesen werden kann. Aber diese Identität folgt unmittelbar aus (116), wenn darin $v = \frac{\tau}{2}$ gesetzt wird.

Es ist also wenigstens für *ein* Beispiel nachgewiesen, dafs sich unsere Resultate mit den Biehlerschen vollkommen decken. *Es würde nun genau so wie in dem eben behandelten Falle die Uebereinstimmung unserer Resultate mit den Biehlerschen in allen übrigen Fällen sich ergeben, indem die bei der Vergleichung auftretenden Thetarelationen sich aus den der Formel* (116) *entsprechenden Formeln durch Nullsetzung (oder überhaupt für einen Specialwert) des Argumentes ableiten lassen.* Hinsichtlich der noch unbestimmten Constanten, welche, wie beim Falle $n = 2$, auch hier in der Mehrzahl der fertigen Formeln stehen bleiben werden, gelten dieselben Bemerkungen, die am Ende des § 1 dieses Abschnittes gemacht worden sind.